
1.(a) Sejam $a_1, a_2 \in A$ e $v_1 + v_2, v_1' + v_2' \in N_1 + N_2$. Então

$$a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_1' + v_2') = (a_1v_1 + a_2v_1') + (a_1v_2 + a_2v_2') \in N_1 + N_2,$$

o que mostra que $N_1 + N_2$ é de facto um submódulo de M.

(b) Seja $v \in N_1 + (N_2 \cap N_3)$. Então $v = v_1 + w$ onde $v_1 \in N_1 \subseteq N_3$ e $w \in N_2 \cap N_3$. Como N_3 é um submódulo $v_1 + w \in N_3$ e portanto $v \in (N_1 + N_2) \cap N_3$. Reciprocamente, se $v \in (N_1 + N_2) \cap N_3$ então $v = v_1 + v_2 \in N_3$ com $v_1 \in N_1 \subseteq N_3$ e $v_2 \in N_2$. Mas $v_2 = v - v_1 \in N_3$ logo $v = v_1 + v_2 \in (N_1 + N_2) \cap N_3$.

2.(a) $S \subseteq A$ é um submódulo de A se e só se $S \neq \emptyset$ e $a_1s_1 + a_2s_2 \in S$ para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ e $S_1, s_2 \in S$. Isto significa que S é um subgrupo de $(A, +)$ tal que $as \in S$ para quaisquer $a \in A$ e $s \in S$, ou seja, que S é um ideal do anel A. Como $\mathbb{Q}$ é um corpo, os únicos ideais de $\mathbb{Q}$ são os triviais: $\{0\}$ e $\mathbb{Q}$ (de facto, se $q \neq 0 \in S$ então $1 = q^{-1}q \in S$; daí decorre imediatamente que $S = \mathbb{Q}$). Logo, estes são os únicos submódulos.

(b) É óbvio que $\{1\}$ é uma base de $\mathbb{Q}$ (como $\mathbb{Q}$-módulo). Como $\mathbb{Q}$ é um corpo, possui a propriedade da invariância dimensional, pelo que $\dim \mathbb{Q} = 1$.

(c) Suponhamos que

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}$$

era um conjunto de geradores do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ (ou seja, do grupo abeliano $(\mathbb{Q}, +)$). Estes elementos só conseguem gerar racionais da forma

$$n_1\frac{a_1}{b_1} + n_2\frac{a_2}{b_2} + \cdots + n_k\frac{a_k}{b_k} \quad (n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}),$$

ou seja,

$$\frac{n_1a_1b_2\ldots b_k + n_2a_2b_1b_3\ldots b_k + \cdots + n_ka_kb_1\ldots b_{k-1}}{b_1b_2\ldots b_k}.$$

Assim, qualquer racional que não seja da forma

$$\frac{z}{b_1b_2\ldots b_k}$$

não seria gerado, como por exemplo o racional

$$\frac{1}{2b_1b_2\ldots b_k}.$$

3.(a) Como se trata de uma soma directa com um número finito de parcelas, coincide com o produto directo. Portanto o módulo $Im(f) \oplus N(g)$ é o produto cartesiano $Im(f) \times N(g)$ com as operações

$$(f(v_1), w_1) + (f(v_2), w_2) = (f(v_1) + f(v_2), w_1 + w_2) = (f(v_1 + v_2), w_1 + w_2)$$

e

$$a(f(v), w) = (af(v), aw) = (f(av), aw).$$

(b) Para cada $w \in N$, $w = fg(w) + w - fg(w)$ onde $fg(w) \in Im(f)$ e $w - fg(w) \in N(g)$ (pois $g(w - fg(w)) = g(w) - gfg(w) = g(w) - g(w) = 0$). Podemos então definir $\phi\colon N \to Im(f) \oplus N(g)$ por

$$\phi(w) = (fg(w), w - fg(w)).$$

Trata-se claramente de um homomorfismo de A-módulos:

$$\begin{aligned}
\phi(a_1w_1 + a_2w_2) &= (fg(a_1w_1 + a_2w_2), a_1w_1 + a_2w_2 - fg(a_1w_1 + a_2w_2)) \\
&= (a_1fg(w_1) + a_2fg(w_2), a_1w_1 - a_1fg(w_1) + a_2w_2 - a_2fg(w_2)) \\
&= (a_1fg(w_1), a_1w_1 - a_1fg(w_1)) + (a_2fg(w_2), a_2w_2 - a_2fg(w_2)) \\
&= a_1\phi(w_1) + a_2\phi(w_2).
\end{aligned}$$

É sobrejectiva:

Para cada $(f(v), w) \in Im(f) \oplus N(g)$ basta tomarmos $u = f(v) + w \in N$. De facto, $\phi(u) = (fg(u), u - fg(u)) = (fg(f(v) + w), f(v) + w - fg(f(v) + w))$ e como $fg(f(v) + w) = fgf(v) + fg(w) = f(v) + f(0) = f(v)$ obtemos $\phi(u) = (f(v), f(v) + w - f(v)) = (f(v), w)$.

É injectiva, ou seja, $N(\phi) = \{0\}$:

$$\phi(w) = 0 \Leftrightarrow (fg(w), w - fg(w)) = (0, 0) \Leftrightarrow fg(w) = 0 \text{ e } w = fg(w) \Leftrightarrow w = 0.$$

Solução alternativa:

Para concluir que $Im(f) \oplus N(g)$ e N são isomorfos basta mostrar que N (com as inclusões $Im(f) \to N$ e $N(g) \to N$) satisfaz a propriedade universal da soma directa $Im(f) \oplus N(g)$, ou seja, para qualquer A-módulo K e quaisquer homomorfismos $\phi_1\colon Im(f) \to K$ e $\phi_2\colon N(g) \to K$ existe um único homomorfismo ϕ que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Im(f) \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & N \arrow[d, dotted, "\phi"] & N(g) \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "\phi_2"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

comutativo.

Para cada $w \in N$, $w = fg(w) + w - fg(w)$ onde $fg(w) \in Im(f)$ e $w - fg(w) \in N(g)$ (pois $g(w - fg(w)) = g(w) - gfg(w) = g(w) - g(w) = 0$). Então, se existir um ϕ nas condições requeridas, terá que satisfazer o seguinte:

$$\phi(w) = \phi(fg(w)+w-fg(w)) = \phi(fg(w))+\phi(w-fg(w)) = \phi_1(fg(w))+\phi_2(w-fg(w)).$$

Isto mostra que se existir tal ϕ ele é único. Como esta lei define, de facto, um homomorfismo de A-módulos (o que pode verificar-se de modo análogo como na outra solução), a propriedade universal verifica-se.

Se quisermos obter uma expressão explícita para o isomorfismo $Im(f) \oplus N(g) \simeq N$, basta considerar

$$K = Im(f) \oplus N(g)$$

e

$$\phi_1 \colon Im(f) \to Im(f) \oplus N(g) \quad \text{e} \quad \phi_2 \colon N(g) \to Im(f) \oplus N(g)$$

dados por $\phi_1(w) = (w, 0)$ e $\phi_2(w) = (0, w)$. Nesse caso, como ambos os módulos $Im(f) \oplus N(g)$ e N satisfazem a propriedade universal da soma directa, o respectivo $\phi \colon N \to Im(f) \oplus N(g)$ é um isomorfismo:

$$\phi(w) = \phi_1(fg(w))+\phi_2(w-fg(w)) = (fg(w), 0)+(0, w-fg(w)) = (fg(w), w-fg(w)).$$

Solução alternativa:

(a) Podemos olhar para $Im(f) \oplus N(g)$ como a soma directa (interna em N) dos submódulos $Im(f)$ e $N(g)$, uma vez que $Im(f) \cap N(g) = \{0\}$:

$$f(v) \in N(g) \Leftrightarrow gf(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

Neste caso $Im(f) \oplus N(g)$ pode ser descrito como o submódulo $Im(f) + N(g) = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in Im(f), w_2 \in N(g)\}$ de N.

(b) Bastará mostrar que $Im(f) + N(g) = N$ (neste caso, o isomorfismo é a identidade!), o que é simples: cada $w \in N$ pode escrever-se como

$$w = fg(w) + (w - fg(w))$$

e $g(w - fg(w)) = g(w) - g(w) = 0$.