Exercícios

2.1. Prove que, sendo $A \subseteq B$ anéis e $b_1, \ldots, b_n \in B$, então $A[b_1, \ldots, b_n]$ é o menor subanel de B que contém A e os elementos $b_1, \ldots, b_n$ (isto é, é o subanel de B gerado por $A \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$).

2.2. Quais dos seguintes polinómios têm factorizações próprias em $\mathbb{Z}[x][y]$? e em $\mathbb{Z}[y][x]$?

(a) $x^2 + xy + x + y$. (b) $xy^2 + x^2y + x^2 + y^2 + 2xy + x + y$.

2.3. Sabendo que $\mathbb{Z}[x, y]$ é um DFU, determine o

$$\text{mdc}\,(x^2y^2 - xy^2 + 2x^2y - 2y^2 - 2xy + x^2 - 4y - x - 2, xy^2 + x^2y + y^2 + 2xy + x^2 + y + x).$$

2.4. Determine a multiplicidade de a como raiz de $p \in A[x]$ nos seguintes casos:

(a) $p = x^3 - yx^2 - y^2x + y^3$, $a = y$, $A = \mathbb{Z}[y]$.

(b) $p = x^2y^2 + 2xy^2 + y^2 + x^2 + 2x + 1$, $a = -1$, $A = \mathbb{Z}[y]$.

2.5. Seja D um domínio de integridade. Mostre que $D[x_1, \ldots, x_n]^* = D^*$.

2.6. Seja D um DFU. Prove que se $p \in D$ é primo em D, então p é primo em $D[x_1, \ldots, x_n]$.

2.7. Factorize os seguintes polinómios num produto de irredutíveis em $\mathbb{Z}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$ e $\mathbb{C}[x, y]$.

(a) $x^2 + y^2$. (b) $x^3 - 2y^3$.

2.8. Factorize ou prove que são irredutíveis em $\mathbb{Z}[x, y]$:

(a) $xy^2 + 2x - 4y + 2$.

(b) $x^5y^2 + x^2y + 2xy + y + x$.

(c) $xy^2 + x^2y + xy + x + y + 1$.

2.9. Mostre que os seguintes polinómios são irredutíveis em $\mathbb{C}[x, y, z]$:

(a) $x^2 + y^2 - 1$. (b) $x^2 - y^2 + z^2$.

2.10. Seja C um corpo e $p(x, y) \in C[x, y]$. Prove que p tem um factor de grau 1 em $C[x, y]$ se e só se

- existir $q \in C[x]$ com $\text{gr}(q) \leq 1$ e $p(x, q(x)) = 0$ ou
- existir $r \in C[y]$ com $\text{gr}(r) \leq 1$ e $p(r(y), y) = 0$.