Exercícios

2.1. Mostre que:

(a) Se $\phi\colon M_1 \to M_2$ é um homomorfismo de A-módulos, o seu núcleo $N(\phi)$ e a sua imagem $\mathrm{Im}(\phi)$ são submódulos de M_1 e M_2 respectivamente.

(b) Um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos é um homomorfismo de grupos abelianos.

(c) Se V_1 e V_2 são espaços vectoriais, os K-homomorfismos $\phi\colon V_1 \to V_2$ são as transformações lineares usuais.

2.2. Seja V um espaço vectorial sobre um corpo K e $T\colon V \to V$ uma transformação linear.

(a) Mostre que V é um $K[x]$-módulo quando se define multiplicação de um elemento $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ por um elemento $v \in V$ por

$$p(x)v = a_n T^n(v) + \cdots + a_1 T(v) + a_0 v.$$

(b) Quais são os submódulos do $K[x]$-módulo V?

(c) Seja $V = \mathbb{R}^n$ e $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$T(v_1, \ldots, v_n) = (v_n, v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Determine os elementos $v \in \mathbb{R}^n$ tais que $(x^2 - 1)v = 0$.

2.3. Seja $\{N_i\}_{i \in I}$ uma família de A-módulos. Mostre que:

(a) Dado um A-módulo M e homomorfismos $\{\phi_i\colon M \to N_i\}_{i \in I}$, existe um único homomorfismo $\phi\colon M \to \prod_{i \in I} N_i$ tal que, para cada $k \in I$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i \in I} N_i \arrow[r, "\pi_k"] & N_k \\
M \arrow[u, dotted, "\phi"] \arrow[ur, "\phi_k"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta.

(b) $\prod_{i \in I} N_i$ é determinado a menos de um isomorfismo pela propriedade expressa em (a).

2.4. Seja $\{N_i\}_{i\in I}$ uma família de A-módulos. Mostre que:

(a) Dado um A-módulo M e homomorfismos $\{\phi_i\colon N_i \to M\}_{i\in I}$, existe um único homomorfismo $\phi\colon \bigoplus_{i\in I} N_i \to M$ tal que, para cada $k \in I$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I} N_i \arrow[d, dotted, "\phi"'] & & N_k \arrow[ll, "\iota_k"'] \arrow[dll, "\phi_k"] \\ M & & \end{tikzcd}$$

comuta.

(b) $\bigoplus_{i\in I} N_i$ é determinado a menos de um isomorfismo pela propriedade expressa em (a).

2.5. Seja M um A-módulo e $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de submódulos de M. Mostre que $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ se e só se as seguintes condições se verificam:

(i) $M = \sum_{i\in I} M_i$.

(ii) $M_j \cap (M_{i_1} + \cdots + M_{i_k}) = \{0\}$ se $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$.

2.6. Uma sucessão de homomorfismos de A-módulos

$$M_0 \xrightarrow{\phi_1} M_1 \xrightarrow{\phi_2} M_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\phi_n} M_n$$

diz-se *exacta* se $\operatorname{Im}(\phi_i) = N(\phi_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Mostre que:

(a) Se $N \subseteq M$ é um submódulo, então a sucessão

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

é exacta.

(b) Se M_1 e M_2 são A-módulos, então a sucessão

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\iota_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \longrightarrow 0$$

é exacta.

2.7. (**Lema pequeno dos Cinco**) Considere o seguinte diagrama comutativo de A-módulos e homomorfismos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_4"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

onde as linhas horizontais são exactas. Mostre que:

(a) Se ϕ_2 e ϕ_4 são injectivos então ϕ_3 é injectivo.

(b) Se ϕ_2 e ϕ_4 são sobrejectivos então ϕ_3 é sobrejectivo.

(c) Se ϕ_2 e ϕ_4 são isomorfismos então ϕ_3 é um isomorfismo.

2.8. (**Lema dos Cinco**) Considere o seguinte diagrama comutativo de A-módulos e homomorfismos

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_4"'] & M_5 \arrow[d, "\phi_5"'] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

onde as linhas horizontais são exactas. Mostre que:

(a) Se ϕ_2 e ϕ_4 são injectivos e ϕ_1 é sobrejectivo então ϕ_3 é injectivo.

(b) Se ϕ_2 e ϕ_4 são sobrejectivos e ϕ_5 é injectivo então ϕ_3 é sobrejectivo.

(c) Se ϕ_1, ϕ_2, ϕ_4 e ϕ_5 são isomorfismos então ϕ_3 é um isomorfismo.

2.9. Seja A um anel comutativo, e M um A-módulo.

(a) Mostre que, se $v \in \mathrm{Tor}(M)$, então $\langle v \rangle \subseteq \mathrm{Tor}(M)$.

(b) É $\mathrm{Tor}(M)$ um submódulo de M?

2.10. Seja A um anel comutativo. Mostre que $\mathrm{End}_A(A^n)$ é isomorfo ao anel $M_n(A)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em A.

2.11. Seja M um A-módulo, $X \neq \varnothing$ um conjunto e $\iota\colon X \to M$ uma função com a seguinte propriedade:

Para todo o A-módulo N e função $\phi\colon X \to N$ existe um único homomorfismo de A-módulos $\widetilde{\phi}\colon M \to N$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\phi"'] & M \arrow[d, dashed, "\widetilde{\phi}"] \\ & N \end{tikzcd}$$

comuta.

Mostre que $\{\iota(x)\}_{x \in X}$ é uma base de M.

2.12. Seja V um espaço vectorial sobre um anel de divisão D. Mostre que:

(a) V possui uma base $\{e_i\}_{i \in I}$.

(b) D possui a propriedade de invariância dimensional.

2.13. Seja A um anel comutativo unitário. Mostre que:

(a) Se $B, C \in M_n(A)$, então $BC = I_{n\times n}$ implica $CB = I_{n\times n}$.

(b) Se B é uma matriz $m \times n$, C é uma matriz $n \times m$, $BC = I_{m\times m}$ e $CB = I_{n\times n}$, então $m = n$.

2.14. Seja $\mathbb{R}^\infty = \bigoplus_{i=1}^\infty \mathbb{R}$ (soma directa de $\mathbb{R}$-módulos), e $A = \mathrm{End}(\mathbb{R}^\infty)$ o anel das transformações $\mathbb{R}$-lineares de $\mathbb{R}^\infty$. Mostre que $A \simeq A \oplus A$ (como A-módulos), isto é, que A possui uma base de 2 elementos.

2.15. Mostre que $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_q$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Qual é a expressão de q em termos de m e n?

2.16. Mostre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n$ é trivial.

2.17. Mostre que, se

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

é uma sucessão exacta de A-módulos e N é um A-módulo, então a sucessão de A-módulos

$$M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

também é exacta. Mostre ainda que o primeiro homomorfismo desta sucessão pode não ser injectivo.

2.18. Mostre que, se M é um D-módulo livre sobre um domínio de integridade D, então M é livre de torção.

2.19. Determine matrizes diagonais equivalentes às matrizes

(a) $\begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}$.

(b) $\begin{pmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & -2 & x-3 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}[x]$.

2.20. Mostre que se p é um primo, as seguintes duas matrizes de $M_n(\mathbb{Z}_p)$ são equivalentes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.21. Sendo

$$\frac{D}{\langle p_1 p_2^2 p_3 \rangle} \oplus \frac{D}{\langle p_1 p_2^3 p_3^2 p_4 \rangle} \oplus \frac{D}{\langle p_1^3 p_2^2 p_4^5 \rangle}$$

um módulo sobre um d.i.p. D, determine as suas decomposições em factores cíclicos invariantes e em factores cíclicos primários.

2.22. Sejam M_1 e M_2 D-módulos de tipo finito.

(a) Mostre que, se M_1 e M_2 são cíclicos, então $M_1 \otimes M_2$ é cíclico.

(b) Determine a decomposição de $M_1 \otimes M_2$ em factores cíclicos invariantes e primários em termos das decomposições de M_1 e M_2.

2.23. Sejam M_1 e M_2 D-módulos cíclicos de ordens a e b, respectivamente. Mostre que, se $\mathrm{mdc}(a, b) \neq 1$, então os factores invariantes de $M_1 \oplus M_2$ são $\mathrm{mdc}(a, b)$ e $\mathrm{mmc}(a, b)$.

2.24. Determine todos os grupos abelianos de ordem 120.

2.25. Seja $T\colon V \to V$ uma transformação linear de um espaço vectorial de dimensão finita sobre um corpo K e suponha que $V \simeq \langle v \rangle$ (como $K[x]$-módulo), onde $\mathrm{ann}(v) = \langle (x - \lambda)^m \rangle$. Mostre que os elementos

$$\{(x - \lambda)^{m-1} v, \ldots, (x - \lambda)v, v\}$$

formam uma base de V sobre K.