Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra Comutativa**

Duração: 2h30m **Exame da Época Normal** 22/1/2013

(*Justifique convenientemente as suas respostas.*)

---

1. Calcule em $\mathbb{Z}[i]$:

   (a) A factorização de 3 e 5 em irredutíveis.

   (b) $\text{mdc}(10, 6)$.

2. Seja D um domínio de integridade.

   (a) Quando é que $p(x) \in D[x]$ se diz *primitivo*?

   (b) Mostre que:

   (b1) Se $p(x) \in D[x]$ é primitivo, $q(x) \mid p(x)$ e $\text{gr}(q(x)) \geq 1$, então $q(x)$ é primitivo.

   (b2) Todo o polinómio primitivo de $D[x]$ admite factorizações em irredutíveis em $D[x]$.

3. Determine todos os grupos abelianos de ordem 180.

   Apresente, para cada um deles, as suas decomposições em factores cíclicos primários e em factores cíclicos invariantes, bem como as listas dos seus divisores elementares e factores invariantes.

4. Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. O *radical* $\sqrt{I}$ de I é definido por

$$\sqrt{I} = \{p \in A \mid \exists\, m \in \mathbb{N} \colon p^m \in I\}.$$

   (a) Determine $\sqrt{\langle 9 \rangle}$ e $\sqrt{\langle 6 \rangle}$ em $\mathbb{Z}$.

   (b) Mostre que $\sqrt{I}$ é um ideal de A.

   (c) Mostre que $\sqrt{I} \subseteq \bigcap\{P \mid P \text{ ideal primo de } A, P \supseteq I\}$.

5. Seja A um anel comutativo e seja M um A-módulo.

   (a) Quando é que M se diz *noetheriano*?

   (b) Seja N um submódulo de M. Prove que se M é noetheriano, então N e M/N também são noetherianos.

6. (a) Quando é que a sequência de homomorfismos de A-módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0$$

   se diz exacta?

   (b) Considere o seguinte diagrama comutativo de A-módulos e homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

   onde as sequências horizontais são exactas. Mostre que se ϕ_1 e ϕ_3 são sobrejectivos então ϕ_2 também é sobrejectivo.
