Duração: 2h30m **Exame da Época de Recurso** 6/2/2013

(*Justifique convenientemente as suas respostas.*)

---

1. Determine:
   (a) $\mathrm{mdc}(11 + 3i, 1 + 8i)$ em $\mathbb{Z}[i]$.
   (b) A factorização do polinómio $x^3 + 2yx^2 + x + 2y$ num produto de irredutíveis em $\mathbb{R}[x, y]$ e $\mathbb{C}[x, y]$.
2. Quando é que um domínio de integridade se diz um domínio euclidiano? Prove que todo o domínio euclidiano é um domínio de ideais principais.
3. Seja D um domínio de integridade e M um D-módulo.
   (a) Como se define $\mathrm{Tor}(M)$?
   (b) Mostre que:
      (i) $\mathrm{Tor}(M)$ é um submódulo de M.
      (ii) Se M é livre então é livre de torção.
      (iii) $M/\mathrm{Tor}(M)$ é um D-módulo livre de torção.
4. Sejam $f : M_1 \to M_2$ e $g : M_2 \to M_1$ homomorfismos de A-módulos.
   (a) Descreva o A-módulo $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{N}(g)$.
   (b) Mostre que se $gf = \mathrm{id}_{M_1}$ então $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{N}(g) \simeq M_2$ (descreva o isomorfismo).
5. Determine todos os grupos abelianos de ordem 180.

   Apresente, para cada um deles, as suas decomposições em factores cíclicos primários e em factores cíclicos invariantes, bem como as listas dos seus divisores elementares e factores invariantes.
6. Seja A um anel comutativo. Prove que um A-módulo é noetheriano se e só se todos os seus submódulos forem de tipo finito.
7. Seja M um módulo noetheriano e $f : M \to M$ um homomorfismo sobrejectivo. Mostre que:
   (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, f^n é um homomorfismo sobrejectivo e $N(f^n) \subseteq N(f^{n+1})$.
   (b) f é um isomorfismo.
