Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra Comutativa**

Duração: 2h30m **Prova de frequência** 21/12/2012

(*Justifique convenientemente as suas respostas.*)

---

1. Calcule:

   (a) $\langle 3 \rangle + \langle 4 \rangle$ (em $\mathbb{Z}_6$).

   (b) $\langle 3 \rangle \oplus \langle 4 \rangle$ (em $\mathbb{Z}_6$).

   (c) $\mathrm{mdc}(2, 3+i)$ (em $\mathbb{Z}[i]$).

   (d) A factorização de $x^3 + x^2y + xy^2 + y \in \mathbb{K}[x,y]$ em irredutíveis (onde $\mathbb{K}$ é um corpo).

   (e) A decomposição do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_{108}$ em factores cíclicos invariantes e em factores cíclicos primários.

2. Seja $f\colon M_1 \to M_2$ um homomorfismo de A-módulos. Considere um submódulo N_1 de M_1 e um submódulo N_2 de M_2 tais que $f(N_1) \subseteq N_2$. Mostre que:

   (a) Existe um, e um só, homomorfismo de A-módulos $\overline{f}\colon M_1/N_1 \to M_2/N_2$ que torna o diagrama seguinte comutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & M_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
M_1/N_1 \arrow[r, dotted, "\overline{f}"'] & M_2/N_2
\end{tikzcd}$$

   (b) $\overline{f}$ é um isomorfismo se e só se $f^{-1}(N_2) \subseteq N_1$ e $\mathrm{Im}(f) + N_2 = M_2$.

3. (a) Determine os submódulos do $\mathbb{Q}$-módulo $\mathbb{Q}$.

   (b) Determine uma base do $\mathbb{Q}$-módulo $\mathbb{Q}$. Qual é a sua dimensão?

   (c) Mostre que, por outro lado, o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ não tem nenhum conjunto finito de geradores.

   (d) Mostre que se D é um domínio de integridade e todo o submódulo do D-módulo D é livre, então D é um domínio de ideais principais.

4. Seja A um anel comutativo com identidade e seja $\mathcal{S}$ o conjunto das sequências infinitas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de elementos de A. Defina $+$ e $\cdot$ em $\mathcal{S}$ por

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{e} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

   onde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$. Mostre que:

   (a) $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ é um anel comutativo com identidade.

   (b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{S}^*$ se e só se $a_0 \in A^*$.

   (c) Se A é um corpo então $\mathcal{S}$ é um domínio de ideais principais.
