Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra Comutativa**

Duração: 1h **Teste 1** 19/10/2012

(*Justifique convenientemente as suas respostas.*)

---

1. (a) Mostre que:
   - (a1) $1+i$ e $1-i$ são elementos irredutíveis de $\mathbb{Z}[i]$.
   - (a2) $2 \in \mathbb{Z}[i]$ não é irredutível em $\mathbb{Z}[i]$ apesar de o ser em $\mathbb{Z}$.

   (b) Calcule (em $\mathbb{Z}[i]$):
   - (b1) $\mathrm{mdc}(2, 3+i)$.
   - (b2) $\langle 2\rangle + \langle 3+i\rangle$.
   - (b3) $\langle 2\rangle \cap \langle 3+i\rangle$.

2. Seja D um domínio de factorização única. Mostre que, para quaisquer $a, b, c \in D$, se $1 \in \mathrm{mdc}(a, b)$ e $a \mid bc$ então $a \mid c$.

3. Seja D um domínio de integridade.

   (a) Quando é que $p(x) \in D[x]$ se diz primitivo?

   (b) Mostre que:
   - (b1) Se $p(x) \in D[x]$ é primitivo, $q(x) \mid p(x)$ e $\mathrm{gr}(q(x)) \geq 1$, então $q(x)$ é primitivo.
   - (b2) Todo o polinómio primitivo de $D[x]$ admite factorizações em irredutíveis em $D[x]$.
