Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra Comutativa**

*Duração: 1h15m* **Teste 2** 16/11/2012

(*Justifique convenientemente as suas respostas.*)

---

1. Seja $A$ um anel. Sendo $I$ um ideal de $A$ e $B$ um subanel de $A$, mostre que:

   (a) $B + I := \{b + a \mid b \in B, a \in I\}$ é um subanel de $A$ e $I$ é um ideal de $B + I$.

   (b) A correspondência $b \mapsto b + I$ define um homomorfismo $\varphi \colon B \to A/I$ com núcleo $B \cap I$ e imagem $(B + I)/I := \{a + I \mid a \in B + I\}$.

   (c) Pelo primeiro Teorema do Isomorfismo, existe um isomorfismo de anéis
   $$\frac{B+I}{I} \cong \frac{B}{B \cap I} \quad \text{[Segundo Teorema do Isomorfismo].}$$

2. (a) Quando é que um domínio de integridade se diz um domínio euclidiano?

   (b) Calcule $\mathrm{mdc}(4 + 3i, 5)$ em $\mathbb{Z}[i]$.

   (c) Prove que todo o domínio euclidiano é um domínio de ideais principais.

3. (a) Factorize o polinómio $x^3 + 2yx^2 + x + 2y$ num produto de irredutíveis em $\mathbb{R}[x, y]$ e $\mathbb{C}[x, y]$.

   (b) Seja $K$ um corpo e $p \in K[x, y]$. Mostre que $p$ tem um factor de grau 1 em $K[x, y]$ se e só se

   - existir $q(x) \in K[x]$ com $\mathrm{gr}(q(x)) \leq 1$ e $p(x, q(x)) = 0$

     ou

   - existir $r(y) \in K[y]$ com $\mathrm{gr}(r(y)) \leq 1$ e $p(r(y), y) = 0$.

---