Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra Comutativa**

SOLUÇÕES **Teste 1** 16/11/2012

---

1. (a) $B + I$ é um subanel de A:

É claramente um subconjunto não vazio de A e para quaisquer $b_1, b_2 \in B$ e $x_1, x_2 \in I$ tem-se $(b_1 + x_1) - (b_2 + x_2) = (b_1 - b_2) + (x_1 - x_2) \in B + I$ e $(b_1 + x_1)(b_2 + x_2) = b_1 b_2 + (b_1 x_2 + b_2 x_1 + x_1 x_2) \in B + I$ (precisamente porque B é um subanel e I é um ideal).

I é um ideal de $B + I$:

I é claramente um subconjunto não vazio de $B + I$ e para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ e $b + y \in B + I$ tem-se $x_1 - x_2 \in I$ e $(b + y)x_1 \in I$ (porque I é um ideal de A).

(b) φ é um homomorfismo:

$\varphi(b_1 + b_2) = b_1 + b_2 + I = (b_1 + I) + (b_2 + I) = \varphi(b_1) + \varphi(b_2)$ e $\varphi(b_1 \cdot b_2) = b_1 b_2 + I = (b_1 + I) \cdot (b_2 + I) = \varphi(b_1) \cdot \varphi(b_2)$.

$N(\varphi) = B \cap I$:

Para $b \in B$, $b \in N(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(b) = I \Leftrightarrow b + I = I \Leftrightarrow b \in I$.

$\varphi(B) = (B + I)/I$:

$\phi(B)$ é um subanel de A/I, ou seja, $\phi(B) = K/I$ onde K é um subanel de A que contém necessariamente B e I, donde $B + I \subseteq K$. Mas para qualquer $k \in K$ existe $b \in B$ tal que $\phi(b) = k + I$, isto é, $b + I = k + I$; portanto, existe $x := k - b \in I$ tal que $k = b + x$. Logo $K = B + I$.

(c) Usando as alíneas anteriores, basta aplicar o (primeiro) Teorema do Isomorfismo ao homomorfismo sobrejectivo $\varphi\colon B \to \varphi(B)$: obtemos então um isomorfismo

$$\frac{B}{B \cap I} = \frac{B}{N(\varphi)} \simeq \varphi(B) = \frac{B + I}{I}.$$

2. (a) Chama-se *domínio euclidiano* a um domínio de integridade D munido de uma função $\delta\colon D \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{N}$ que satisfaz a seguinte condição: para quaisquer $a, b \in D$ ($b \neq 0$) existem $q, r \in D$ tais que $a = qb + r$ onde ou $r = 0$ ou $\delta(r) < \delta(b)$.

(b) Uma vez que

$$\frac{4 + 3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

então $4 + 3i = (1 + i)5 + (-1 - 2i)$. Por sua vez, $5 = (-1 - 2i)(-1 + 2i)$. Assim, pelo algoritmo de Euclides, $-1 - 2i$ é um mdc de $4 + 3i$ e 5. Logo

$$\mathrm{mdc}(4 + 3i, 5) = \{-1 - 2i, 1 + 2i, 2 - i, -2 + i\}.$$

(c) Proposição I.4.2:

Seja I um ideal arbitrário de um domínio euclidiano D com função euclidiana δ. Se $I = \{0\}$, então $I = \langle 0 \rangle$ é um ideal principal. Podemos pois admitir que $I \neq \{0\}$. Nesse caso seja

$$N = \{\delta(a) \mid a \in I,\, a \neq 0\} \subseteq \mathbb{N}.$$

É claro que N é não vazio (pois $I \neq \{0\}$), pelo que tem um mínimo. Seja b um elemento de $I \smallsetminus \{0\}$ onde esse mínimo é atingido. Provemos que $I = \langle b \rangle$. Como $b \in I$, é óbvio que $\langle b \rangle \subseteq I$. Por outro lado, se $a \in I$, usando a definição de domínio euclidiano, existem $q, r \in D$ tais que $a = qb + r$ com $r = 0$ ou $\delta(r) < \delta(b)$. Dado que I é um ideal, podemos concluir que $r = a - qb \in I$. Mas então $r = 0$, com efeito, se r fosse não nulo, teríamos $r \in I \smallsetminus \{0\}$ com $\delta(r) < \delta(b)$, um absurdo. Assim, a é um múltiplo de b pelo que pertence ao ideal $\langle b \rangle$.

3. (a) $p(x,y) = x^3 + 2yx^2 + x + 2y = (2x^2+2)y + x^3 + x = (2x^2+2)y + x(x^2+2) = (x^2+2)(2y+x)$. Esta é a factorização de $p(x,y)$ em irredutíveis em $\mathbb{R}[x,y]$ pois ambos os factores são irredutíveis: $2y + x \in \mathbb{R}[y][x]$, como é de grau 1, não tem factorizações próprias em $\mathbb{R}[y][x]$ e portanto, como é primitivo, é irredutível em $\mathbb{R}[y][x]$, ou seja, é irredutível em $\mathbb{R}[x,y]$; $x^2 + 2$ é irredutível em $\mathbb{R}[x]$ (critério de Eisenstein, $p = 2$) logo é irredutível em $\mathbb{R}[x][y]$ (pois é um polinómio de grau 0 em $\mathbb{R}[x][y]$), ou seja, é irredutível em $\mathbb{R}[x,y]$.
Já em $\mathbb{C}[x,y]$, $x^2+2 = (x-\sqrt{2}\,i)(x+\sqrt{2}\,i)$ e portanto $(x-\sqrt{2}\,i)(x+\sqrt{2}\,i)(2y+x)$ é a factorização de $p(x,y)$ em irredutíveis em $\mathbb{C}[x,y]$.

(b) $\Rightarrow$: Um factor de grau 1 em $K[x,y]$ é da forma $ax+by+c$ com $a,b,c \in K$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Portanto, por hipótese,

$$p(x,y) = \underbrace{(ax+by+c)}_{p_1(x,y)} p_2(x,y).$$

No caso em que $a \neq 0$ consideremos

$$r(y) = -ba^{-1}y - ca^{-1} \in K[y].$$

É claro que $\mathrm{gr}(r(y)) \leq 1$ (note que pode ser 0, caso $b = 0$) e $p(r(y), y) = 0$ pois $p_1(r(y), y) = a(-ba^{-1}y - ca^{-1}) + by + c = -by - c + by + c = 0$.
Quando $a = 0$ então $b \neq 0$ e, nesse caso, de modo análogo, basta considerar

$$q(x) = -ab^{-1}x - cb^{-1} \in K[x].$$

$\Leftarrow$: Suponhamos, sem perda de generalidade, que existe $q(x) \in K[x]$, $\mathrm{gr}(q(x)) \leq 1$, tal que $p(x, q(x)) = 0$. Isto significa que $q(x) = ax + b$ $(a, b \in K)$ é raiz do polinómio $p(x,y) \in K[x][y]$, ou seja, $(y - ax - b) \mid p(x,y)$. Portanto, podemos escrever $p(x,y) = (y - ax - b)p_2(x,y)$ onde $(y - ax - b)$ é um factor de grau 1 em $K[x,y]$.