Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra Comutativa**

Duração: 1h15m **Teste 1** 18/10/2013

(*Justifique convenientemente as suas respostas.*)

---

1. Quais são as unidades de $\mathbb{Z}_{10}$?
   Mostre que 2 é um elemento primo de $\mathbb{Z}_{10}$ mas não é irredutível.

2. Designemos os elementos primos de $\mathbb{Z}$ por *primos euclidianos* e os elementos primos de $\mathbb{Z}[i]$ por *primos gaussianos*.

   (a) Seja $p \in \mathbb{Z}$ um primo euclidiano. Mostre que:

   (i) Se a equação $p = x^2 + y^2$ tem soluções $x, y \in \mathbb{Z}$, então $x + yi$ é um primo gaussiano e p não é um primo gaussiano.

   (ii) Se a equação $p = x^2 + y^2$ não tem soluções em $\mathbb{Z}$, então p é um primo gaussiano.

   (iii) Se p é ímpar (isto é, $p \neq 2$) e a equação $p = x^2 + y^2$ tem soluções $x, y \in \mathbb{Z}$, então $p \equiv 1 \pmod 4$.

   (b) Dê exemplos de um primo euclidiano que é também primo gaussiano e de um primo euclidiano que não é primo gaussiano.

3. (a) Seja $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ um polinómio de grau ≥ 1 irredutível. Mostre que $f(x)$ é primitivo.

   (b) Seja $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$.

   (i) Mostre que o ideal $I = \langle x \rangle + \langle d \rangle$ de $\mathbb{Z}[x]$ não é principal.

   (ii) Existe $\mathrm{mdc}(x, d)$? Em caso afirmativo, determine-o.

   (c) Conclua (usando eventualmente resultados provados nas aulas) que $\mathbb{Z}[x]$ é um exemplo de DFU que não é DIP.
