Duração: 2h30m 18/01/06

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do exame permaneça não negativa).
Nas outras questões justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) A divisão de polinómios é sempre possível em $\mathbb{Z}_{16}[x]$.

   (b) Se $n \in \mathbb{N}$ é um número primo então $\langle n \rangle$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z}$.

   (c) $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^2 + u + 1)$, onde $u^2 + u - 6 = 0$.

   (d) Se L é uma extensão finita de K e $[L : K]$ é um número primo, então L é uma extensão simples de K.

   (e) O código (5,2)-linear binário definido pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ corrige erros duplos.

2. Seja $A = (\mathbb{Q}, +, *)$, onde $+$ denota a adição usual de racionais e $*$ é definida por $a * b = 2ab$.

   (a) Mostre que A é um anel comutativo com identidade.

   (b) Determine um subanel de A que seja isomorfo ao anel usual $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dos inteiros, descrevendo o isomorfismo (e justificando que é de facto um isomorfismo).

3. Determine:

   (a) O inverso de $\theta^2 - 6\theta + 8$ na extensão simples $\mathbb{Q}(\theta)$, onde θ satisfaz $\theta^3 - 6\theta^2 + 9\theta + 3 = 0$.

   (b) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \theta) : \mathbb{Q}]$ onde $\theta^2 + \sqrt{3}\theta + 3 = 0$.

   (c) O número de elementos do corpo $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$.

4. Prove que:

   (a) Se K é um corpo, o anel de polinómios $K[x]$ é de ideais principais.

   (b) Se K não é um corpo, o anel de polinómios $K[x]$ não é necessariamente de ideais principais.

5. Mostre que:

   (a) O corpo $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2 + x + 4 \rangle$ é isomorfo a $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$.

   (b) A soma de todos os elementos de um corpo finito, com a excepção de $\mathbb{F}_2$, é 0.