
O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (a) Se C é um corpo, então $C[x]$ é um corpo. | | $\times$ |

   `[Nenhum polinómio de grau` ≥ 1 `em` $C[x]$ `é invertível.]`

   (b) $4x+1$ não é uma unidade de $\mathbb{Z}_8[x]$. | | $\times$ |

   `[`$(4x+1)(4x+1) = 0x^2+4x+4x+1 = 1$`.]`

   (c) Para qualquer anel A e quaisquer $p(x), q(x) \in A[x]$, tem-se $gr(p(x)q(x)) = gr(p(x)) + gr(q(x))$. | | $\times$ |

   `[O exemplo na alínea anterior mostra que não.]`

   (d) Os polinómios $2x$ e $x+2$ de $\mathbb{Z}_3[x]$ são primos entre si. | $\times$ | |

   `[`$2x = 2(x+2)+2$ `pelo que o` mdc `de` $2x$ `e` $x+2$ `é o polinómio mónico de` $\mathbb{Z}_3[x]$ `associado de 2, ou seja, 1.]`

   (e) A função $h : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}$ definida por $h\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i 5^n$ é um homomorfismo de anéis. | | $\times$ |

   `[Por exemplo,` $h(1)=1$ `e` $h(1+x)=10$ `mas` $h(2+x)=15\neq 11$`.]`

2. (a) Calcule o produto $(2x^2+x+1)(2x^2+3x+2)$ em $\mathbb{Z}_m[x]$, para $m = 2, 3, 6$.

$$\begin{aligned}(2x^2+x+1)(2x^2+3x+2) &= 4x^4+6x^3+4x^2+2x^3+3x^2+2x+2x^2+3x+2\\ &= 4x^4+8x^3+9x^2+5x+2\\ &= \begin{cases} x^2+x & \text{se } m=2\\ x^4+2x^3+2x+2 & \text{se } m=3\\ 4x^4+2x^3+3x^2+5x+2 & \text{se } m=6.\end{cases}\end{aligned}$$

   (b) x^4+2x^3+2x+2 é irredutível em $\mathbb{Z}_3[x]$?

   Não: pela alínea anterior, $x^4+2x^3+2x+2 = (2x^2+x+1)(2x^2+3x+2)$, e nenhum destes factores, sendo de grau 2, é uma unidade de $\mathbb{Z}_3[x]$.
