Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra II**

Soluções **Teste 2B** 2/11/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (a) Em $\mathbb{Z}_8[x]$, $4x^2+2x+4$ é um divisor de zero.

V	F
×	

   `[`$4(4x^2+2x+4)=0$`.]`

   (b) Se $A[x]$ tem divisores de zero, então A tem divisores de zero.

V	F
×	

   `[Sejam` $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ `e` $q(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$ `dois elementos de` $A[x]$`, com` $a_n\neq 0$ `e` $b_m\neq 0$`, tais que` $p(x)q(x)=0$`. Então` $a_nb_m=0$`.]`

   (c) O anel das matrizes quadradas de ordem 20 com elementos no corpo $\mathbb{Z}_5$ tem característica 20.

V	F
	×

   `[A característica é claramente 5 e não 20.]`

   (d) Em $\mathbb{Z}_3[x]$, $mdc(x^7+x^6+2x^5+x^3+2x^2+2x, 2x^5+x^3+2x^2+1)=x^2+2$.

V	F
	×

   `[`$x^7+x^6+2x^5+x^3+2x^2+2x=(2x^5+x^3+2x^2+1)(2x^2+2x)$ `donde` $mdc(x^7+x^6+2x^5+x^3+2x^2+2x, 2x^5+x^3+2x^2+1)=x^5+2x^3+x^2+2$`.]`

   (e) $\mathbb{R}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{Q}$.

V	F
	×

   `[Por exemplo, pelo Teorema de Lindemann,` $\pi\in\mathbb{R}$ `é transcendente sobre` $\mathbb{Q}$`.]`

2. Seja D um domínio de integridade. Mostre que:

   (a) Um polinómio redutível em $D[x]$ não tem necessariamente raízes em D.

   Por exemplo, x^4+2x+1 é redutível em $\mathbb{R}[x]$, pois $x^4+2x+1=(x^2+1)^2$, mas não tem raízes reais.

   (b) Se $gr(p(x))\geq 2$ e $p(x)$ tem uma raiz em D, então é redutível em $D[x]$.

   Se $p(x)$ tem uma raiz a em D então, pelo Teorema do Resto, $p(x)=(x-a)q(x)$ para algum polinómio $q(x)\in D[x]$. Pela regra dos graus, $q(x)$ tem necessariamente grau ≥ 1, pelo que não é uma unidade de $D[x]$. Portanto, $(x-a)q(x)$ é uma factorização não trivial de $p(x)$ em $D[x]$, o que mostra que este polinómio é redutível em $D[x]$.
