Soluções **Teste 2C** 2/11/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Em $\mathbb{Z}_{16}[x]$, $4x^2 + 2x + 4$ é um divisor de zero. [V: ×]

   [$8(4x^2 + 2x + 4) = 0$.]

   (b) Se $A[x]$ tem divisores de zero, então A tem divisores de zero. [V: ×]

   [Sejam $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ dois elementos de $A[x]$, com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, tais que $p(x)q(x) = 0$. Então $a_n b_m = 0$.]

   (c) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 1\rangle$ é um corpo. [F: ×]

   [Basta observar que o ideal $\langle x^2 + 2x + 1\rangle$ não é maximal pois o polinómio $x^2 + 2x + 1$ não é irredutível sobre $\mathbb{Z}_3$: é de grau 2 e tem uma raiz em $\mathbb{Z}_3$, nomeadamente o número 2.]

   (d) Os polinómios $x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5$ e $2x^3 - 2$ de $\mathbb{Z}_7[x]$ são primos entre si. [F: ×]

   [$x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5 = (2x^3 - 2)(4x^4 + 5x^3 + 4x + 2) + 5x + 2$ e $2x^3 - 2 = (5x + 2)(6x^2 - x + 6)$ pelo que o $mdc(x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5, 2x^3 - 2)$ é o polinómio mónico associado de $5x + 2$, ou seja, $3(5x + 2) = x + 6$.]

   (e) $\mathbb{C}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{R}$. [V: ×]

   [Todo o elemento de $\mathbb{C}$ é algébrico sobre $\mathbb{R}$, pois $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.]

2. Seja D um domínio de integridade. Mostre que:

   (a) Se $gr(p(x)) \geq 2$ e $p(x)$ tem uma raiz em D, então é redutível em $D[x]$.

   Se $p(x)$ tem uma raiz a em D então, pelo Teorema do Resto, $p(x) = (x - a)q(x)$ para algum polinómio $q(x) \in D[x]$. Pela regra dos graus, $q(x)$ tem necessariamente grau ≥ 1, pelo que não é uma unidade de $D[x]$. Portanto, $(x-a)q(x)$ é uma factorização não trivial de $p(x)$ em $D[x]$, o que mostra que este polinómio é redutível em $D[x]$.

   (b) Um polinómio redutível em $D[x]$ não tem necessariamente raízes em D.

   Por exemplo, $x^4 + 2x + 1$ é redutível em $\mathbb{R}[x]$, pois $x^4 + 2x + 1 = (x^2 + 1)^2$, mas não tem raízes reais.
