
O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) $\mathbb{C}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{R}$.

V	F
×	

   [$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ e i é algébrico sobre $\mathbb{R}$. Alternativa: todo o número complexo $a + ib$ é algébrico sobre $\mathbb{R}$ pois é raiz do polinómio $x^4 - 2(a^2 - b^2)x^2 + (a^2 + b^2)^2$.]

   (b) O polinómio $x^3 + 2x^2 + 10$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ mas é redutível sobre $\mathbb{Z}_{13}$.

V	F
×	

   [Sobre $\mathbb{Q}$: pelo Critério de Eiseinstein ($p = 2$).
   Sobre $\mathbb{Z}_{13}$: pelo critério das raízes (1 é raiz).]

   (c) O polinómio $x^2 - 2x + 2$ é redutível sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

V	F
	×

   [As duas raízes de $x^2 - 2x + 2$ são $1 \pm i$ e não pertencem a $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, pois $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \{a + b\sqrt{3}i \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.]

   (d) $\mathbb{R}$ é um corpo algebricamente fechado.

V	F
	×

   [$x^2 + 1$ não tem raízes reais.]

   (e) O número $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ é construtível a partir de $\mathbb{Q}$.

V	F
×	

   [O número $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ corresponde ao ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ do plano.
   Este ponto é claramente construtível a partir de $\mathbb{Q}$ pois,
   como vimos, qualquer raiz quadrada é construtível a partir de $\mathbb{Q}$.]

2. (a) Determine a extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \theta)$ de $\mathbb{Q}$, onde $\theta^2 - 2\theta + 2 = 0$.

   $x^2 + 3$ é o polinómio mínimo de $\sqrt{-3}$ sobre $\mathbb{Q}$ e, por 1(c), $x^2 - 2x + 2$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Então

   $$[\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \theta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \theta) : \mathbb{Q}(\sqrt{-3})][\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) : \mathbb{Q}] = 2 \times 2 = 4,$$

   pelo que $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \theta) = \{a + b\sqrt{3}i + c\theta + d\theta\sqrt{3}i \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

   (b) Qual é o inverso de θ nesta extensão?

   $\theta^2 - 2\theta + 2 = 0$ implica $\theta(\theta - 2) = -2$, pelo que $\theta\frac{\theta-2}{-2} = 1$. Portanto $\theta^{-1} = \frac{\theta-2}{-2} = 1 - \frac{1}{2}\theta$.
