Adenda

Observação sobre o Teorema 3.8. (página 79)

Este resultado, que é a chave para a prova da impossibilidade dos problemas clássicos de construções com régua e compasso, como veremos adiante, permite-nos ter a certeza da não construtibilidade de muitos números a partir dos racionais.

Note-se que o recíproco deste teorema é falso: para um contra-exemplo consulte o Exemplo 13-18 em [William J. Gilbert, *Modern algebra with applications*[1], Wiley, 1976], que especifica um número θ, algébrico sobre $\mathbb{Q}$, com $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}] = 4$ mas que, contudo, não é construtível a partir de $\mathbb{Q}$. Portanto, não podemos usar o Teorema 3.8 para concluir da construtibilidade de números θ tais que $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}]$ é da forma 2^n.

No entanto, com a ajuda dos resultados enunciados na página 76, podemos fazer isso para muitos números θ. Por exemplo, para qualquer número α construtível a partir dos racionais, $\sqrt{\alpha}$ é também construtível. Aplicando, repetidamente este resultado, conjuntamente com o facto de que aplicações sucessivas das operações de corpo mantêm a construtibilidade, podemos então concluir que números do tipo

$$\sqrt{p+\sqrt{p}}, \quad \sqrt{5\sqrt{2}-3} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{5\sqrt{2}-3}+\sqrt[4]{2}}{5-\sqrt{2\sqrt{3}-4}}$$

são construtíveis a partir de $\mathbb{Q}$.

[1] Cota na Biblioteca: 20-01/GIL.