 Exame de Álgebra II

Duração: 2h30m 19/01/07

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Considere o anel
$$T_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$
das matrizes triangulares superiores sobre $\mathbb{Z}$ (com a adição e multiplicação usuais de matrizes).

   (a) Mostre que $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ é um ideal de $T_2(\mathbb{Z})$.

   (b) Determine o anel quociente $T_2(\mathbb{Z})/I$ e mostre que é isomorfo ao anel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

2. Determine:

   (a) O menor subanel de $\mathbb{Z}$ que contém o 3.

   (b) As raízes racionais do polinómio $p(x) = 2x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 12x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

   (c) A decomposição de $p(x)$ em factores irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$.

   (d) Uma base da extensão algébrica $\mathbb{Q}(\alpha)$ (onde $\alpha \notin \mathbb{Q}$ e $p(\alpha) = 0$).

   (e) O inverso de α na extensão da alínea anterior.

   (f) O grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ de $\mathbb{Q}$.

3. Para as afirmações seguintes, escreva uma prova se a afirmação é verdadeira, caso contrário apresente uma justificação sucinta da sua falsidade:

   (a) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = 3n$ é um homomorfismo de grupos mas não é um homomorfismo de anéis.

   (b) É possível, usando régua e compasso, construir um cubo com volume igual ao de uma esfera dada.

   (c) Se A é um anel, o anel de polinómios $A[x]$ é de ideais principais.

   (d) Se K é um corpo finito, o número de elementos de K é da forma p^n, para algum primo p e algum natural n.

   (e) O código (7,4)-linear binário definido pela matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
corrige erros duplos.

4. Seja M um ideal maximal de um anel $(A, +, \cdot)$. Prove que M é o único ideal primo de A que contém $M^2 = \{ab \mid a, b \in M\}$.