Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra II**

Duração: 40m **Teste 1** 04/10/06

Os dois primeiros grupos de questões são de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (a) Seja A um anel. Então $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ para quaisquer $a, b \in A$.

   (b) Num anel com identidade, todo o elemento que não é um divisor de zero é invertível.

   (c) A função $h : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ definida por $h(a) = a^3$ é um homomorfismo de anéis.

   (d) Todo o corpo finito tem característica positiva prima.

   (e) As unidades do *anel dos inteiros de Gauss*, $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, são precisamente os elementos $1, -1, i, -i$.

2. Indique quais dos seguintes conjuntos são subanéis ou ideais primos dos anéis indicados colocando, em cada alínea, uma cruz na coluna correcta:

   (**N**: **não** é um subanel; **S**: **é** um subanel mas **não** é um ideal;
   I: **é** um ideal mas **não** é primo; **P**: **é** um ideal primo) **N S I P**

   (a) O conjunto $\{x + yi\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ no anel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

   (b) O conjunto $\{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f(4) = 0\}$ no anel das funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

   (c) O conjunto $\{f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6 \mid f(2) = 0\}$ no anel das funções de $\mathbb{Z}_6$ em $\mathbb{Z}_6$.

3. Seja $A = (\mathbb{Q}, +, *)$, onde $+$ denota a adição usual de racionais e $*$ é definida por $a * b = 2ab$.

   (a) Mostre que A é um anel comutativo com identidade.

   (b) Determine um subanel de A que seja isomorfo ao anel usual $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dos inteiros, descrevendo o isomorfismo (e justificando que se trata de facto de um isomorfismo).
