

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

(**V**: verdadeira; **F**: falsa)

V **F**

- | | | |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) Seja A um anel. Então $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ para quaisquer $a, b \in A$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (b) Num anel com identidade, todo o elemento que não é um divisor de zero é invertível. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (c) A função $h : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ definida por $h(a) = a^3$ é um homomorfismo de anéis. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (d) Todo o corpo finito tem característica positiva prima. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (e) As unidades do anel dos inteiros de Gauss, $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, são precisamente os elementos $1, -1, i, -i$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

2. Indique quais dos seguintes conjuntos são subanéis ou ideais primos dos anéis indicados colocando, em cada alínea, uma cruz na coluna correcta:

(**N**: não é um subanel; **S**: é um subanel mas não é um ideal;

I: é um ideal mas não é primo; **P**: é um ideal primo)

N **S** **I** **P**

- | | | | | |
|--|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) O conjunto $\{x + yi\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ no anel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) O conjunto $\{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(4) = 0\}$ no anel das funções de \mathbb{Z} em \mathbb{Z} . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (c) O conjunto $\{f : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6 \mid f(2) = 0\}$ no anel das funções de \mathbb{Z}_6 em \mathbb{Z}_6 . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

3. (a) Uma vez que $+$ é a adição usual, o par $(\mathbb{Q}, +)$ é um grupo comutativo. Bastará então verificar que a operação $*$ é associativa, distributiva relativamente à adição e tem elemento neutro:

Associatividade: Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$ temos $a * (b * c) = a * (2bc) = 2a2bc = 4abc$ enquanto $(a * b) * c = (2ab) * c = 4abc$, pelo que se confirma a propriedade.

Distributividade: Como $*$ é comutativa basta verificar uma das condições de distributividade: para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a * (b + c) = 2a(b + c) = 2ab + 2ac = (a * b) + (a * c)$.

Elemento neutro: $1/2$ é elemento neutro de $*$ pois, para qualquer $a \in \mathbb{Q}$, $a * (1/2) = a$.

(b) Consideremos $S = \{a/2 : a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$, que é claramente um subanel de A : é não vazio e, para quaisquer $x = a/2, y = b/2 \in S$, tem-se $x - y = (a/2) - (b/2) = (a - b)/2 \in S$ e $x * y = 2xy = 2(a/2)(b/2) = ab/2 \in S$.

Também não é difícil ver que $(S, +, *) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot)$:

Como, para cada $x \in S$, $2x \in \mathbb{Z}$, podemos definir a função

$$f : (S, +, *) \rightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot)$$

$$x \mapsto 2x.$$

É um homomorfismo de anéis: para quaisquer $x, y \in S$ tem-se $f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$ e $f(x * y) = f(2xy) = 4xy = 2x2y = f(x)f(y)$.

É injectiva: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y$.

É sobrejectiva: para cada $a \in \mathbb{Z}$ seja $x = a/2 \in S$; evidentemente $f(x) = 2(a/2) = a$.