Soluções **Teste 3** 06/12/06

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) O polinómio $x^4 + 4x^2 + 6$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ mas é redutível sobre $\mathbb{Z}_{11}$. $\boxed{\times}\boxed{}$

   [Sobre $\mathbb{Q}$: pelo Critério de Eiseinstein ($p = 2$).
   Sobre $\mathbb{Z}_{11}$: pelo critério das raízes (1 é raiz).]

   (b) $\mathbb{R}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{Q}$. $\boxed{}\boxed{\times}$

   [$\mathbb{R}$ contém números, como π ou e, que são transcendentes sobre $\mathbb{Q}$, pelo que se trata de uma extensão transcendente de $\mathbb{Q}$.]

   (c) O número real $\sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$. $\boxed{\times}\boxed{}$

   [Basta observar que $\sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}$ é raiz do polinómio $(x^2 - 2)^3 = -2$, que tem coeficientes racionais.]

   (d) O número real $\sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}$ é construtível, por régua e compasso, a partir de $\mathbb{Q}$. $\boxed{}\boxed{\times}$

   [A dimensão $[\mathbb{Q}(\sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}) : \mathbb{Q}]$, sendo igual a 6, não é uma potência de 2, pelo que o número não poderá ser construtível.]

   (e) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}] = 6$. $\boxed{\times}\boxed{}$

   [Pelo Teorema da Torre, $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})]\,[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}]$. O polinómio mínimo de $\sqrt[3]{3}$ sobre $\mathbb{Q}$ é o polinómio $x^3 - 3$, pelo que $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 3$. Por outro lado, $x^2 + 1$ é o polinómio mínimo de i sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ (a irredutibilidade segue do facto das suas duas raízes não serem reais e $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \subset \mathbb{R}$). Portanto, $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})] = 2$, donde $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}] = 6$.]

2. Determine o inverso do elemento $\theta^2 - 6\theta + 8$ de $\mathbb{Q}(\theta)$, onde θ é raiz do polinómio $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$.

   O polinómio $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pelo critério de Eisenstein, $p = 3$), logo é o polinómio mínimo $m(x)$ de θ sobre $\mathbb{Q}$. Seja $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Uma vez que $m(x) = xf(x) + x + 3$ e $f(x) = (x - 9)(x + 3) + 35$ (o que confirma que $mdc(m(x), f(x)) = 1$), então

$$35 = f(x) - (x - 9)(m(x) - xf(x)) = (x^2 - 9x + 1)f(x) - (x - 9)m(x),$$

ou seja,

$$1 = \frac{1}{35}[(x^2 - 9x + 1)f(x) - (x - 9)m(x)].$$

Substituindo x por θ obtemos $1 = \frac{1}{35}(\theta^2 - 9\theta + 1)f(\theta)$, o que mostra que

$$(\theta^2 - 6\theta + 8)^{-1} = f(\theta)^{-1} = \frac{1}{35}(\theta^2 - 9\theta + 1).$$

3. Determine o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ de $\mathbb{Q}$.

   O elemento $\sqrt[4]{3}$ tem polinómio mínimo $x^4 - 3$ sobre $\mathbb{Q}$. Portanto,

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) = \{a_0 + a_1\sqrt[4]{3} + a_2\sqrt[4]{9} + a_3\sqrt[4]{27} \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

   Para definir um $\mathbb{Q}$-automorfismo Φ de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ basta definir a imagem de $\sqrt[4]{3}$ por Φ. Pelos resultados das aulas teóricas, qualquer $\mathbb{Q}$-automorfismo $\Phi : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ transforma $\sqrt[4]{3}$ numa raiz em $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ do mesmo polinómio. Como $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) \subseteq \mathbb{R}$, além de $\sqrt[4]{3}$, só mais uma das quatro raízes complexas de $x^4 - 3$ pertence a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$: o número $-\sqrt[4]{3}$. Existem, pois, precisamente dois $\mathbb{Q}$-automorfismos:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_0 : & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{3} & \mapsto & \sqrt[4]{3} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_1 : & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{3} & \mapsto & -\sqrt[4]{3}. \end{array}$$

   O primeiro é a identidade e o segundo aplica cada elemento $a_0 + a_1\sqrt[4]{3} + a_2\sqrt[4]{9} + a_3\sqrt[4]{27}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ em $a_0 - a_1\sqrt[4]{3} + a_2\sqrt[4]{9} - a_3\sqrt[4]{27}$. Portanto, $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}), \mathbb{Q}) = \{id, \Phi_1\}$, que é um grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.
