Duração: 2h30m **Exame (época de recurso)** 7/07/08

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

---

1. Diga, justificando sucintamente, qual o valor lógico das seguintes afirmações:
   (a) Se $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ é tal que 2 é raiz de $p(x)$ e de $p'(x)$, então $(x-2)^2$ divide $p(x)$.
   (b) Num anel comutativo com identidade, se um ideal não é primo então não é maximal.
   (c) Se $1+i$ é raiz de $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, então $p(x)$ é divisível por x^2-2x+2 em $\mathbb{R}[x]$.
   (d) É possível, usando régua (não graduada) e compasso, duplicar um cubo.

2. Seja $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (a) Sabendo que $\sqrt{2}\,i$ é raiz de $p(x)$, determine o corpo de decomposição F de $p(x)$.
   (b) Calcule $[F : \mathbb{Q}]$ e determine uma base do espaço vectorial F sobre $\mathbb{Q}$.
   (c) Escreva o elemento $(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}\,i)$ de F em função da base encontrada em (b).

3. Seja θ uma raíz do polinómio $x^3 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (a) Determine $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$.
   (b) Escreva $\frac{5\theta^2-10}{\theta+1}$ como combinação linear de uma base de $\mathbb{Q}(\theta)$.

4. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Considere o conjunto
$$\mathcal{N}(A) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\}.$$
   (a) Calcule $\mathcal{N}(\mathbb{Z})$ e $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_{32})$.
   (b) Mostre que:
      (i) $\mathcal{N}(A)$ é um ideal de A.
      (ii) Para qualquer ideal primo I de A, $\mathcal{N}(A) \subseteq I$.
      (iii) $\mathcal{N}(A/\mathcal{N}(A)) = \{\mathcal{N}(A)\}$.

5. Considere um referencial ortonormado de $\mathbb{R}^3$ e os pontos $A = (\alpha, \alpha, 0)$, $B = (\alpha, -\alpha, 0)$, $C = (-\alpha, \alpha, 0)$, $D = (-\alpha, -\alpha, 0)$ e $E = (0, 0, \alpha)$ com $\alpha > 0$.
   (a) Determine, em função de α, o volume $V(\alpha)$ da pirâmide de base $[ABCD]$ e vértice E.
   (b) Verifique se existe um real construtível α tal que $V(\alpha) = \alpha^2 + 1$.

6. Prove que, para qualquer corpo K, os elementos irredutíveis de $K[x]$ são os polinómios de grau 1 se e só se K não admite extensões algébricas próprias.
