*Duração: 2h15m* **Frequência** 27/05/08

*Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.*

---

1. (a) Qual dos seguintes ideais de $\mathbb{Z}$ é maximal: $\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$ ou $4\mathbb{Z}$ ?
   (b) Qual dos seguintes polinómios não é irredutível em $\mathbb{R}[x]$: $6x+6, x^2+4$ ou $x^3+1$ ?
   (c) Qual dos seguintes polinómios é irredutível em $\mathbb{Z}[x]$: $2x^2+2$, $x^3+3x^2+6x+3$ ou $x^2-1$ ?

2. Seja $L$ uma extensão de um corpo $K$.
   (a) Dado $\theta \in L$, defina *polinómio mínimo* de $\theta$ sobre $K$.
   (b) Sendo $\theta$ o real $\sqrt{1+\sqrt{3}}$, determine:
      (i) O polinómio mínimo de $\theta$ sobre $\mathbb{Q}$.
      (ii) O polinómio mínimo de $\theta$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
      (iii) $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}]$ e uma base de $\mathbb{Q}(\theta)$ sobre $\mathbb{Q}$.

3. Seja $D$ um domínio de integridade. Mostre que:
   (a) Para cada $d \in D-\{0\}$, a aplicação $\phi_d : D \to D$, definida por $\phi_d(x) = dx$, é injectiva.
   (b) Se $D$ é finito, então $D$ é um corpo.

4. Considere o polinómio $p(x) = x^3+2x^2+1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
   (a) Mostre que $K = \mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ é um corpo e descreva os seus elementos.
   (b) Determine o cardinal de $K$, a sua característica e $[K:\mathbb{Z}_5]$.

5. (a) Considere o polinómio $p(x) = x^4-3x^3+2x^2+2x-4$. Sabendo que $1+i$ é raiz de $p(x)$, decomponha este polinómio em factores irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$.
   (b) Considere o polinómio $p(x) = x^5-2x^3+4x+2$.
      (i) Prove que $p(x)$ tem uma raiz real $\alpha$.
      (ii) Justifique se $\alpha$ é ou não um real construtível a partir dos racionais.

6. Considere um corpo $K$ e uma sua extensão $L$ de grau 7. Mostre que $K(\theta) = K(\theta^2)$, para qualquer $\theta \in L$.

---