---

(1) -2 é o *simétrico* de 2, isto é, o inverso de 2 relativamente à primeira operação do anel. Então $-2 = 4$. Analogamente, 5^{-1} representa o inverso de 5 relativamente à segunda operação do anel. Portanto, $5^{-1} = 5$.

(2) Sim, tem divisores de zero, precisamente os elementos 2, 3 e 4 (pois em A, $2 \cdot 3 = 0$ e $4 \cdot 3 = 0$). Os elementos 1 e 5, sendo invertíveis, não podem ser divisores de zero, e 0 também não o é por definição de divisor de zero.

(3) A lei do corte é válida para todos os elementos a diferentes de zero que não são divisores de zero (portanto, 1 e 5):

$$ab = ac \Leftrightarrow a(b - c) = 0 \Rightarrow b - c = 0 \Leftrightarrow b = c.$$

Por outro lado, as identidades $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1$, $2 \cdot 1 = 2 \cdot 4$, $3 \cdot 2 = 3 \cdot 4$ e $4 \cdot 1 = 4 \cdot 4$ mostram que a lei do corte não é válida para $a = 0, 2, 3, 4$.

(4) A identidade é a função $\mathbb{I}$ definida por $\mathbb{I}(x) = 1$ para qualquer $x \in \mathbb{Z}_6$ (pois é óbvio que $\mathbb{I} \cdot f = f$ para qualquer $f \in \mathcal{F}$). Quanto aos divisores de zero:

$f \in \mathcal{F}$ é um divisor de zero se e só se $f \neq 0$ e existe $g \neq 0$ em $\mathcal{F}$ tal que $f \cdot g = 0$. A primeira condição significa que $f(x) \neq 0$ para algum $x \in \mathbb{Z}_6$. A segunda condição significa que existe $g \in \mathcal{F}$ tal que $g(y) \neq 0$ e $(f \cdot g)(y) = 0$ para algum $y \in \mathbb{Z}_6$ (em $z \neq y$ basta fazer $g(z) = 0$ para se ter $(f \cdot g)(z) = 0$). Mas $g(y) \neq 0$ e $f(y)g(y) = 0$ significa que $f(y) \in \{0, 2, 3, 4\}$.

Em conclusão, f é um divisor de zero se e só $f(x) \neq 0$ para algum $x \in \mathbb{Z}_6$ e $f(y) \in \{0, 2, 3, 4\}$ para algum $y \in \mathbb{Z}_6$. Por exemplo, a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

é um divisor de zero.

(5) É o próprio f pois $(f \cdot f)(n) = f(n) \cdot f(n)$ é igual a $1 \cdot 1 = 1$, quando $n \leq 1$, e é igual a $5 \cdot 5 = 1$ para $n \geq 2$.

(6) O exemplo da alínea anterior mostra imediatamente que os elementos invertíveis de $\mathcal{F}$ são precisamente as funções f cujo contradomínio está contido em $\{1, 5\}$, pois 1 e 5 são os únicos elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_6$.

(7) $\mathcal{F}_{(a,b)}$ é não vazio. Para que seja um subanel, é necessário que $f - g \in \mathcal{F}_{(a,b)}$ sempre que $f, g \in \mathcal{F}_{(a,b)}$, isto é, $(f - g)(a) = b$ quando $f(a) = b = g(a)$. Mas, nessas condições, $(f - g)(a) = f(a) - g(a) = b - b = 0$ pelo que, para que $\mathcal{F}_{(a,b)}$ seja fechado para a subtracção, é obrigatório que $b = 0$. É agora fácil verificar que nessas condições (a qualquer e $b = 0$) a outra condição que caracteriza os subanéis é automaticamente verdadeira. Portanto, $\mathcal{F}_{(a,b)}$ é um subanel de $\mathcal{F}$ se e só se $b = 0$.

(8) Pela alínea anterior, $\mathcal{F}_{(a,0)}$ é um subanel de $\mathcal{F}$. Sejam $f \in \mathcal{F}$ e $g \in \mathcal{F}_{(a,0)}$. Então $g(a) = 0$, pelo que $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a) = 0$. Logo, $f \cdot g \in \mathcal{F}_{(a,0)}$, o que mostra que $\mathcal{F}_{(a,0)}$ é também um ideal de $\mathcal{F}$. Este ideal não é primo uma vez que, por exemplo, para quaisquer funções $f, g \in \mathcal{F}$ tais que $f(a) = 2$ e $g(a) = 3$, se tem $f \cdot g \in \mathcal{F}_{(a,0)}$ mas nem f nem g pertencem a $\mathcal{F}_{(a,0)}$.

(9) Como

$$f + \mathcal{F}_{(a,0)} = g + \mathcal{F}_{(a,0)} \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{F}_{(a,0)} \Leftrightarrow (f - g)(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = g(a),$$

então o que distingue duas classes laterais $f + \mathcal{F}_{(a,0)}$ e $g + \mathcal{F}_{(a,0)}$ é o valor dos respectivos representantes f e g em a. Assim, denotando por f_n $(n \in \mathbb{Z}_6)$ a função definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } x = a \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

é evidente que

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}_{(a,0)} = \{f_0 + \mathcal{F}_{(a,0)}, f_1 + \mathcal{F}_{(a,0)}, f_2 + \mathcal{F}_{(a,0)}, f_3 + \mathcal{F}_{(a,0)}, f_4 + \mathcal{F}_{(a,0)}, f_5 + \mathcal{F}_{(a,0)}\}.$$

Este anel quociente é claramente isomorfo a $\mathbb{Z}_6$. Basta para isso verificar que a função bijectiva

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{F}/\mathcal{F}_{(a,0)} & \to & \mathbb{Z}_6 \\ & f_n + \mathcal{F}_{(a,0)} & \mapsto & n \end{array}$$

é um homomorfismo de anéis.