Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 45m **Teste 2** 14/04/08

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (a) Os polinómios x^2+x+1 e x^3+2x-4 de $\mathbb{Q}[x]$ são primos entre si. [× |]

   `[Seguindo o Algoritmo de Euclides:`

$$x^3+2x-4=(x-1)(x^2+x+1)+2x-3,$$
$$x^2+x+1=\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)(2x-3)+\frac{19}{4}.$$

   Portanto, o máximo divisor comum de x^2+x+1 e x^3+2x-4 é o polinómio mónico associado do polinómio constante $\frac{19}{4}$, isto é, 1.]

   (b) Se $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ é um polinómio mónico, então qualquer raiz racional de $p(x)$ é inteira. [× |]

   [Como vimos nas aulas, se $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ e c/d (escrita na forma reduzida) é uma raiz de $p(x)$, então c divide a_0 e d divide $a_n=1$. Portanto, $d=\pm1$ pelo que c/d é um inteiro.]

   (c) $\mathbb{Z}[x]$ é um domínio de ideais principais. [| ×]

   [Como vimos nas aulas, o ideal $\langle 2,x\rangle$ de $\mathbb{Z}[x]$ não é principal:

$$I=\langle 2,x\rangle=\{2p(x)+xq(x):p(x),q(x)\in\mathbb{Z}[x]\}$$

   consiste no conjunto de todos os polinómios cujo termo constante é par. Suponhamos que $I=\langle m(x)\rangle$ para algum polinómio $m(x)$. Então $m(x)\mid 2$ e $m(x)\mid x$, pelo que $m(x)$ só pode ser o polinómio constante 1 ou -1. Mas então $\langle m(x)\rangle=\mathbb{Z}[x]\neq I$.]

   (d) $x^5+2x^3+\frac{8}{7}x^2-\frac{4}{7}x+\frac{2}{7}$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. [× |]

   [Como $x^5+2x^3+\frac{8}{7}x^2-\frac{4}{7}x+\frac{2}{7}=\frac{1}{7}\left(7x^5+14x^3+8x^2-4x+2\right)$ e este último polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (critério de Eisenstein, com $p=2$), o primeiro também o é evidentemente.]

   (e) $7x^5+14x^3+8x^2-4x+2$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. [× |]

   [Justificado na alínea anterior.]

2. As possíveis raízes racionais de $p(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ são 1 e -1. Nenhuma delas é raiz pelo que o polinómio não tem raízes racionais. Assim, a única hipótese dele ser redutível sobre $\mathbb{Q}$ é factorizar-se na forma
$$p(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$
para alguns racionais a, b, c, d. Resolvendo o sistema correspondente
$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + ac + d = -6 \\ ad + bc = 0 \\ bd = 1. \end{cases}$$
chega-se a uma solução:
$$p(x) = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1).$$
Portanto, $p(x)$ é redutível sobre $\mathbb{Q}$.

3. (a) Sim, porque $x^2 + 1$ é irredutível sobre $\mathbb{R}$.

   (b) Seja $p(x) + \langle x^2 + 1 \rangle \in \mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$. Dividindo $p(x)$ por $x^2 + 1$ obtém-se
$$p(x) = q(x)(x^2 + 1) + r(x)$$
onde $r(x) = ax + b$ para algum par de reais a, b. Portanto
$$\begin{aligned} p(x) + \langle x^2 + 1 \rangle &= (q(x)(x^2 + 1) + ax + b) + \langle x^2 + 1 \rangle \\ &= ax + b + \langle x^2 + 1 \rangle. \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} \big(a + bx + \langle x^2 + 1 \rangle\big) \cdot \big(c + dx + \langle x^2 + 1 \rangle\big) &= (a + bx)(c + dx) + \langle x^2 + 1 \rangle \\ &= (ac + (ad + bc)x + bdx^2) + \langle x^2 + 1 \rangle \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)x + \langle x^2 + 1 \rangle \end{aligned}$$
pois $bdx^2 = bd(x^2 + 1) - bd$.

Nota: Denotando cada classe $a + bx + \langle x^2 + 1 \rangle$ abreviadamente por $a + bi$, reconhecemos aqui a fórmula da multiplicação de números complexos:
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$