

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Considere o anel $A = (\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ onde as operações $+$ e \cdot são definidas por

$$a + b = a \oplus_6 b \oplus_6 1, \quad \forall a, b \in A$$

$$a \cdot b = a \oplus_6 b \oplus_6 (a \otimes_6 b), \quad \forall a, b \in A.$$

- (a) Denotando o zero de A por $\mathbb{0}$ e a identidade (caso exista) por $\mathbb{1}$, preencha (quando possível) o seguinte quadro:

$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	-0	-1	-2	-3	-4	-5	0^{-1}	1^{-1}	2^{-1}	3^{-1}	4^{-1}	5^{-1}

- (b) Quais são os elementos invertíveis de A ? E os divisores de zero?

- (c) Para que elementos $a \in A$ é válida a *lei do corte*

$$\forall b, c \in A (a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c)?$$

2. Considere o homomorfismo de anéis $\phi : \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_5$ definido por $\phi(n) = n \bmod 5$.

- (a) Calcule o núcleo de ϕ .

- (b) Defina ideal maximal de um anel. Mostre que $Nuc(\phi)$ é um ideal maximal de \mathbb{Z}_{10} .

3. Diga, justificando sucintamente, qual o valor lógico das seguintes afirmações:

- (a) É possível, usando régua (não graduada) e compasso, duplicar um cubo.

- (b) Em $\mathbb{F}_{27}[x]$, o polinómio $x^3 + x + 1$ pode factorizar-se na forma $(x - 1)q(x)$.

4. Seja $\theta \in L \supseteq K$ um elemento algébrico sobre o corpo K e $m(x)$ o respectivo polinómio mínimo. Mostre que cada elemento de $K(\theta)$ tem uma expressão única na forma $p(\theta)$, para algum polinómio $p(x) \in K[x]$ de grau inferior ao grau de $m(x)$.

5. Determine:

- (a) A dimensão e uma base da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \theta)$, sendo θ uma raiz não racional do polinómio $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$.

- (b) O número de elementos do corpo $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$.

- (c) A factorização do polinómio $q(x) = x^4 - x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ em factores irredutíveis.

6. Seja L uma extensão de um corpo K .

- (a) Recorde que o *grupo de Galois* de L sobre K , $Gal(L; K)$, é formado pelos automorfismos de L que fixam os elementos de K . Prove que se $\theta \in L$ é algébrico sobre K , de grau n , então $|Gal(K(\theta), K)| \leq n$.

- (b) Mostre que os elementos de L algébricos sobre K formam um subcorpo de L .