Duração: 1h **Teste 1** 24/03/09

NOME DO ALUNO: ____

(Justifique convenientemente as suas respostas.)

Seja $(A, +, \cdot)$ **um <u>anel arbitrário</u>.**

(1) Prove que em A, $0 = -0$.

(2) A equação $a + x = b$ $(a, b \in A)$ tem exactamente uma solução em A. O que é que pode dizer sobre a equação $ax = b$?

Suponha que A **<u>tem uma identidade 1</u>.**

(3) Mostre que se $a \in A$ é tal que $a^2 = a$, então $aAa := \{axa \mid x \in A\}$ é um subanel de A com identidade $a1a = a$.

Suponha que A **é <u>comutativo</u>.**

(4) Prove que $R(A) := \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$ é um ideal de A.

(5) Justifique que $R(A/R(A))$ se reduz ao zero do anel $A/R(A)$.

(6) Mostre que $R(A)$ está contido em qualquer ideal primo de A.

Suponha agora que A **é um <u>domínio de integridade</u>.**

Para as afirmações seguintes, escreva uma prova se a afirmação é verdadeira, senão apresente um contra-exemplo:

(7) $a^2 = 1 \Rightarrow (a = 1 \vee a = -1)$.

(8) $-1 \neq 1$.

(9) $(ab = ac \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = c$.

Finalmente, assuma que A **é um <u>corpo</u>.**

(10) Mostre que se $\varphi : A[x] \to A[x]$ é um isomorfismo tal que $\varphi(a) = a$ para qualquer $a \in A$, então $\varphi(x) = cx + d$ para algum par $c, d \in A$.
