Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 2h30m **Exame** 9/06/2011

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação.

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
(**V**: verdadeira; **F**: falsa)

	V	F
(a) $\mathbb{N}$ é um subanel de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.		
(b) Os polinómios $2x$ e $x+2$ de $\mathbb{Z}_3[x]$ são primos entre si.		
(c) $2x^{50} + x^{49} - x^{48} + 18x^6 + 18x^5 - 2x - 2$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.		
(d) Se L é uma extensão finita de K e $\theta \in L$ então $\mathrm{grau}(\theta) \mid [L : K]$.		
(e) Os corpos $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2+x+4\rangle$ e $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2+1\rangle$ são isomorfos.		

2. Considere o conjunto $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$.
   (a) Prove que $(G, \cdot)$, onde $\cdot$ denota a multiplicação usual de matrizes, é um grupo abeliano.
   (b) Mostre que $(G, \cdot, \odot)$, onde $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & aa' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, é um anel comutativo com identidade.
   (c) Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ é que o ideal $I_n = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$ de G é um ideal primo?

3. Calcule as raízes racionais do polinómio $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

4. Sendo θ o real $\sqrt{1+\sqrt{3}}$, determine:
   (a) O polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$.
   (b) $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$ e uma base de $\mathbb{Q}(\theta)$ sobre $\mathbb{Q}$.
   (c) O polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

5. Sejam D um domínio de integridade e $p(x) \in D[x]$. Prove que se $p(x)$ é mónico e tem grau 2 ou 3, então $p(x)$ é redutível sobre D se e só se existe $\alpha \in D$ tal que $p(\alpha) = 0$.

6. Sejam K um corpo e $\overline{K}$ o seu fecho algébrico. Considere $\alpha, \beta \in \overline{K}$ com $\alpha \neq \beta$ e seja
$$A = \{f(x) \in K[x] \mid f(\alpha) = f(\beta) = 0\}.$$
   (a) Mostre que A é um ideal de $K[x]$.
   (b) Se $\alpha, \beta \in K$, mostre que A é o ideal de $K[x]$ gerado por $h(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$.
   (c) Prove que A é um ideal primo se, e somente se, α e β têm o mesmo polinómio mínimo sobre K.
