Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 2h30m **Exame** 29/06/2011

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação.

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (a) Em qualquer anel A, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, $\forall\, a, b \in A$. ☐ ☐

   (b) Em $\mathbb{Z}_{16}[x]$, $4x^2 + 2x + 4$ é um divisor de zero. ☐ ☐

   (c) $\mathbb{Q}[x]/\langle 2x^{50} - x^{49} + 18x^5 - 9x^4 + 6x - 3\rangle$ é um corpo. ☐ ☐

   (d) Sejam K,K_1 e K_2 corpos com $K \subseteq K_i$ $(i = 1, 2)$. Se K_1 e K_2 são extensões finitas de K e $\text{mdc}([K_1 : K], [K_2 : K]) = 1$ então $K \subsetneq K_1 \cap K_2$. ☐ ☐

2. (a) Dê um exemplo de um polinómio em $\mathbb{R}[x]$ de grau 4 que é redutível sobre $\mathbb{R}$ mas não tem raízes reais.

   (b) Para cada $m \in \mathbb{Z}$ seja

   $$p_m(x) = x^5 + mx^4 - m^2x - 1 \in \mathbb{Z}[x].$$

   Determine os valores de $m \in \mathbb{Z}$ para os quais $p_m(x)$ tem raízes em $\mathbb{Q}$.

3. Prove que se K é um corpo, o anel de polinómios $K[x]$ é de ideais principais. E se K não é um corpo, o anel de polinómios $K[x]$ é necessariamente de ideais principais?

4. Calcule $p(4)$ em $\mathbb{F}_3$ e $\mathbb{F}_7$, sendo $p(x) = 2x^{100} + 15x$.

5. Determine:

   (a) O inverso de $\theta^2 - 6\theta + 8$ na extensão simples $\mathbb{Q}(\theta)$, onde θ satisfaz $\theta^3 - 6\theta^2 + 9\theta + 3 = 0$.

   (b) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \theta) : \mathbb{Q}]$ onde $\theta^2 + \sqrt{3}\theta + 3 = 0$.

   (c) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \theta) : \mathbb{Q}]$ onde $\theta^2 + \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{2} = 0$.

6. Seja K um corpo de característica diferente de 2, e L uma extensão de K tal que $[L : K] = 2$. Mostre que $L = K(\sqrt{\alpha})$ para algum $\alpha \in K$.
