Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 2h30m **Frequência** 1/06/2011

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação.

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) A divisão de polinómios é sempre possível em $\mathbb{Z}_4[x]$. ☐ ☐

   (b) $p(x) \in A[x]$ (A: anel comutatico com 1) pode ter mais do que $gr(p(x))$ raízes. ☐ ☐

   (c) O número real $\sqrt{2-\sqrt[3]{2}}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$. ☐ ☐

   (d) O número real $\sqrt{2-\sqrt[3]{2}}$ é construtível, por régua e compasso, a partir de $\mathbb{Q}$. ☐ ☐

   (e) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}\,i)$. ☐ ☐

2. Considere o anel
$$T_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$
das matrizes triangulares superiores sobre $\mathbb{Z}$ (com a adição e multiplicação usuais de matrizes).

   (a) Mostre que $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ é um ideal de $T_2(\mathbb{Z})$.

   (b) Determine o anel quociente $T_2(\mathbb{Z})/I$ e mostre que é isomorfo ao anel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

3. Sejam K um corpo e $p(x) \in K[x]$. Prove que:

   (a) Se $p(x)$ é de grau 2 ou 3, então $p(x)$ é redutível sobre K se e só se existe $\alpha \in K$ tal que $p(\alpha) = 0$.

   (b) O ideal $I = \langle p(x) \rangle$ é maximal se $p(x)$ é irredutível sobre K.

4. Determine:

   (a) As raízes racionais do polinómio $p(x) = 2x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 12x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

   (b) A decomposição de $p(x)$ em factores irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$.

   (c) Uma base da extensão algébrica $\mathbb{Q}(\alpha)$ (onde $\alpha \notin \mathbb{Q}$ e $p(\alpha) = 0$).

   (d) O inverso de α na extensão da alínea anterior.

5. Existe algum corpo com 12 elementos? A identidade 1 é solução da equação $x^3+x^2+x+1 = 0$ no corpo $\mathbb{F}_{256}$? Determine todas as soluções nesse corpo.

6. Seja M um ideal próprio de um anel $(A, +, \cdot)$ comutativo com identidade.

   (a) Prove que M é maximal se e só se $\forall\, a \in A \setminus M \;\; \exists\, x \in A \,:\, 1 - ax \in M$.

   (b) Mostre, usando a alínea anterior, que todo o ideal maximal é primo.
