Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

*Duração: 1h30m* **Teste 1** 12/03/2012

NOME DO ALUNO: ______________________________________________

(1) Considere o anel $A = (\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ onde as operações $+$ e $\cdot$ são definidas por

$$a + b = a \oplus_6 b \oplus_6 1 \ \ \forall a, b \in A$$

$$a \cdot b = a \oplus_6 b \oplus_6 (a \otimes_6 b) \ \ \forall a, b \in A.$$

(a) Preencha as tabelas das operações de $A$:

| $+$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |

(b) Denotando o zero de $A$ por $\mathbb{O}$ e a identidade (caso exista) por $\mathbb{1}$, preencha (quando possível) o seguinte quadro:

| $\mathbb{O}$ | $\mathbb{1}$ | $-0$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ | $0^{-1}$ | $1^{-1}$ | $2^{-1}$ | $3^{-1}$ | $4^{-1}$ | $5^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | |

(c) Enumere os divisores de zero de $A$: ______________________________

(2) Seja $\mathcal{F}_6$ o anel das funções $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ com a adição e multiplicação definidas do seguinte modo:

$$\forall\, f, g \in \mathcal{F}_6 \ \ \forall\, x \in \mathbb{Z}_6 \quad (f+g)(x) = f(x) \oplus_6 g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \otimes_6 g(x).$$

(a) Mostre que $I = \{f \in \mathcal{F}_6 \mid f(0) = 0\}$ é um ideal de $\mathcal{F}_6$. É primo?

(b) Determine:

(i) A identidade de $\mathcal{F}_6$.

(ii) O inverso (para a multiplicação) do elemento $f \in \mathcal{F}_6$ definido por

$$f(n) = 1 \ (n \leq 2) \quad \text{e} \quad f(n) = 5 \ (n \geq 3).$$

(iii) Os elementos invertíveis de $\mathcal{F}_6$.

(iv) Os divisores de zero de $\mathcal{F}_6$.

(v) O anel quociente $\mathcal{F}_6/I$.