Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

*Duração: 1h30m* **Teste 1** 12/03/2012

---

SOLUÇÕES

(1) (a)

| $+$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 3 | 5 | 1 | 3 | 5 |
| 2 | 2 | 5 | 2 | 5 | 2 | 5 |
| 3 | 3 | 1 | 5 | 3 | 1 | 5 |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

(b)

| $\mathbb{0}$ | $\mathbb{1}$ | $-0$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ | $0^{-1}$ | $1^{-1}$ | $2^{-1}$ | $3^{-1}$ | $4^{-1}$ | $5^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 | 0 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | 4 | $\times$ |

(c) Divisores de zero de $A$: 1, 2, 3 (pois $1 \cdot 2 = 5 = 0_{\mathcal{A}}$ e $2 \cdot 3 = 5 = 0_{\mathcal{A}}$).

(2) (a) É claro que $I \neq \emptyset$. Além disso, para quaisquer $f, g \in I$, $f + g \in I$ pois $(f+g)(0) = f(0) \oplus_6 g(0) = 0 \oplus_6 0 = 0$. Por outro lado, para quaisquer $f \in I$ e $g \in \mathcal{F}_6$, $f \cdot g \in I$ pois $(f \cdot g)(0) = f(0) \otimes_6 g(0) = 0 \otimes_6 g(0) = 0$. Portanto $I$ é um ideal de $\mathcal{F}_6$.

Será primo? Não, pois $f \cdot g \in I$ (isto é, $f(0) \otimes_6 g(0) = 0$) não implica necessariamente $f \in I$ ou $g \in I$ (pois $\mathbb{Z}_6$ é um anel com divisores de zero); por exemplo, se $f$ for a função constante com valor 2 e $g$ a função constante com valor 3, o produto $f \cdot g$ pertence a $I$ (pois é a função nula) mas $f, g \notin I$.

(b) (i) Podemos simplificar muito a escrita observando que, uma vez que $\mathbb{Z}_6$ é finito, podemos descrever totalmente qualquer função $f\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ pela sequência ordenada

$$(f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)) \in \mathbb{Z}_6^6$$

das suas imagens. É evidente que a identidade de $\mathcal{F}_6$ é a função constante $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

(ii) Uma vez que em $\mathbb{Z}_6$, $1^{-1} = 1$ e $5^{-1} = 5$, então $f^{-1} = (1, 1, 1, 5, 5, 5)^{-1} = (1, 1, 1, 5, 5, 5)$.

(iii) Do exemplo da alínea anterior, decorre imediatamente que $f \in \mathcal{F}_6$ é invertível se e só se cada $f(x)$ é um elemento invertível de $Z_6$, ou seja, $f(x) \in \{1, 5\}$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(iv) $f \in \mathcal{F}_6$ é um divisor de zero se e só se $f \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ e $f(y) \in \{0, 2, 3, 4\}$ para algum $y$. São assim as sequências $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ diferentes da nula que têm pelo menos uma coordenada no conjunto $\{0, 2, 3, 4\}$.

(Observe como, dos $6^6$ elementos de $\mathcal{F}_6$, $2^6$ são invertíveis, 1 não é invertível nem divisor de zero (a sequência nula, que é o zero do anel) e os restantes $6^6 - 2^6 - 1$ são divisores de zero.

(v) Por definição, $\mathcal{F}_6/I = \{f + I \mid f \in \mathcal{F}_6\} = \{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) + I \mid a_i \in \mathbb{Z}_6\}$ (com as operações usuais nas classes laterais). Por outro lado,

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) + I = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) + I$$

se e só se $(a_0 - b_0, a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4, a_5 - b_5) \in I$, ou seja, $a_0 - b_0 = 0$, isto é, $a_0 = b_0$. Então, imediatamente,

$$\mathcal{F}_6/I = \{(a, 0, 0, 0, 0, 0) + I \mid a \in \mathbb{Z}_6\},$$

que é um anel claramente isomorfo a $\mathbb{Z}_6$. O isomorfismo é dado pela bijecção

$$(a, 0, 0, 0, 0, 0) + I \mapsto a.$$

Solução alternativa: Uma vez que $I = \{(0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid b_i \in \mathbb{Z}_6\}$, então a classe $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) + I \in \mathcal{F}_6/I$ é o conjunto

$$\{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) + (0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid b_i \in \mathbb{Z}_6\}$$

ou seja

$$\{(a_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4, a_5 + b_5) \mid b_i \in \mathbb{Z}_6\} = \{(a_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \mid c_i \in \mathbb{Z}_6\}.$$

Portanto, o que caracteriza os elementos de cada classe é a primeira coordenada da sequência, sendo indiferente o valor das restantes. Assim, $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) + I = (a_0, 0, 0, 0, 0, 0) + I$, donde

$$\mathcal{F}_6/I = \{(a_0, 0, 0, 0, 0, 0) + I \mid a_0 \in \mathbb{Z}_6\}.$$

---