Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 1h15m **Teste 2** 23/04/2012

NOME DO ALUNO: ____

1. (a) Quais das seguintes funções são homomorfismos de anéis? :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a & \longmapsto & a^2 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{Z}_3 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_3 \\ a & \longmapsto & a^3 \end{array}$$

   (b) Qual dos seguintes polinómios

      (i) não é irredutível em $\mathbb{R}[x]$? : $6x+6$, x^2+4 ou x^3+1 ?

      (ii) é irredutível em $\mathbb{Z}[x]$? : $2x^2+2$, x^3+3x^2+6x+3 ou x^2-1 ?

   (c) Considere o polinómio $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$. Sabendo que $1+i$ é raiz de $p(x)$, decomponha este polinómio em factores irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$. (Justifique porque cada um desses factores é irredutível.)

2. Determine:

   (a) O máximo divisor comum de $x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 14$ e $x^3 - x^2 - 7x + 7$ em $\mathbb{Q}[x]$.

   (b) Os divisores (a menos de associados) de $x^4 - 1$ em $\mathbb{R}[x]$.

   (c) Todos os naturais $n \geq 2$ para os quais $x-1$ divide $x^3 + x^2 + x + 2$ em $\mathbb{Z}_n[x]$.

3. Considere o ideal $I = \langle x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 14, x^3 - x^2 - 7x + 7\rangle$ de $\mathbb{Q}[x]$.

   (a) Determine o polinómio mónico $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $I = \langle h(x)\rangle$.

   (b) Diga, justificando, se I é maximal.

   (c) Será que o elemento $x + I$ de $\mathbb{Q}[x]/I$ tem inverso ? Em caso afirmativo, determine-o.