Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 1h30m **1ª Frequência** 4/04/2018

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel com identidade 1. Mostre que se $a \in A$ é tal que $a^2 = a$, então

$$aAa := \{axa \mid x \in A\}$$

é um subanel de A com identidade $a1a = a$.

(Cuidado: não se diz que A é comutativo.)

2. Seja I um ideal de um anel A (comutativo, com identidade 1). O que pode dizer sobre I se:

   (a) 1 pertencer a I?

   (b) A for um corpo?

3. (a) Seja $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 4 \in \mathbb{Z}[x]$.
   Sabendo que $\sqrt{2}\, i$ é raiz de $p(x)$, determine a factorização de $p(x)$ em factores irredutíveis de $\mathbb{Q}[x]$.

   (b) Seja $q_m(x) = x^5 + mx^4 - m^2x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$.
   Determine os valores de $m \in \mathbb{Z}$ para os quais $q_m(x)$ tem raízes em $\mathbb{Q}$.

4. Considere o ideal I de $\mathbb{Q}[x]$ gerado pelos polinómios

$$a(x) = x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 14 \quad \text{e} \quad b(x) = x^3 - x^2 - 7x + 7.$$

   (a) Mostre que $I = \langle m(x) \rangle$ com $m(x) = x^2 - 7$.

   (b) I é maximal? Justifique a sua resposta.

   (c) Será que o elemento $1 + x + I$ de $\mathbb{Q}[x]/I$ tem inverso? Em caso afirmativo, determine-o.

   (d) Mostre que $\mathbb{Q}[x]/I$ é isomorfo ao anel

$$(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, \cdot) \ \text{ onde } \ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \ \text{ e } \ (a, b) \cdot (c, d) = (ac + 7bd, ad + bc).$$