DMat - UC **Teste de Corpos e Equações Algébricas [A]**

Duração: 1h | Justifique convenientemente as suas respostas | 02/03/2018

NOME DO ALUNO:

Seja $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ o anel dos inteiros módulo 8 (com a respectiva aritmética modular). Considere o anel

$$\mathcal{B} = (\mathbb{Z}_8, \oplus, \otimes)$$

onde as operações $\oplus$ e $\otimes$ são definidas por

$$a \oplus b = a + b + 1$$
$$a \otimes b = a + b + (a \cdot b)$$

1. Preencha as seguintes tabelas (colocando uma $\times$ nos casos em que o elemento indicado não existe):

anel	zero	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
$\mathcal{A}$									
$\mathcal{B}$									

anel	identidade	0^{-1}	1^{-1}	2^{-1}	3^{-1}	4^{-1}	5^{-1}	6^{-1}	7^{-1}
$\mathcal{A}$									
$\mathcal{B}$									

A partir de agora, para cada $a \in \mathbb{Z}_8$, denote o *simétrico* de a no anel $\mathcal{A}$ por $-a$ e o *simétrico* de a no anel $\mathcal{B}$ por $\ominus a$.

2. Indique, justificando, quais são os divisores de zero de $\mathcal{B}$. Apresente uma fórmula que relacione os divisores de zero de $\mathcal{B}$ com os divisores de zero de $\mathcal{A}$.

3. O subconjunto $I = \{7, 1, 3, 5\}$ de $\mathbb{Z}_8$ é um ideal de $\mathcal{B}$. Mostre que é primo.

   Recorde: Um ideal I de um anel A diz-se *primo* se $ab \in I \;\Rightarrow\; a \in I$ ou $b \in I$.

4. Considere duas classes laterais $a \oplus I, b \oplus I$ no anel $\mathcal{B}$. Quando é que elas são iguais?

5. Conclua então quantos elementos vai ter o anel quociente $\mathcal{B}/I$.