Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

SOLUÇÕES **Teste** 2/03/2018

---

1. Relativamente ao anel $\mathcal{A}$, bem conhecido, não há dúvida nenhuma no preenchimento das tabelas:

anel	zero	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
$\mathcal{A}$	0	0	7	6	5	4	3	2	1

anel	identidade	0^{-1}	1^{-1}	2^{-1}	3^{-1}	4^{-1}	5^{-1}	6^{-1}	7^{-1}
$\mathcal{A}$	1	$\times$	1	$\times$	3	$\times$	5	$\times$	7

Determinemos $0_{\mathcal{B}}$: como $a \oplus 0_{\mathcal{B}} = a \Leftrightarrow a + 0_{\mathcal{B}} + 1 = a \Leftrightarrow 0_{\mathcal{B}} + 1 = 0$, então $0_{\mathcal{B}} = 7$. Isso, bem como o cálculo de todos os simétricos, pode ser feito mais rapidamente calculando a tabela da operação $\oplus$ em $\mathcal{B}$:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	$\boxed{7}$
0	1	2	3	4	5	6	$\boxed{7}$	0
1	2	3	4	5	6	$\boxed{7}$	0	1
2	3	4	5	6	$\boxed{7}$	0	1	2
3	4	5	6	$\boxed{7}$	0	1	2	3
4	5	6	$\boxed{7}$	0	1	2	3	4
5	6	$\boxed{7}$	0	1	2	3	4	5
6	$\boxed{7}$	0	1	2	3	4	5	6
$\boxed{7}$	0	1	2	3	4	5	6	$\boxed{7}$

Portanto, o neutro é o 7 e $-0 = 6, -1 = 5, -2 = 4, -3 = 3, -4 = 2, -5 = 1$ e $-6 = 0$.

Solução alternativa: $a \oplus (\ominus a) = 7 \Leftrightarrow a + (\ominus a) + 1 = 7 \Leftrightarrow \ominus a = 6 - a$.

Quanto à identidade e os elementos invertíveis basta determinarmos a tabela de $\otimes$:

$\otimes$	$\boxed{0}$	1	2	3	4	5	6	7
$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	5	7	1	3	5	7
2	2	5	$\boxed{0}$	3	6	1	4	7
3	3	7	3	7	3	7	3	7
4	4	1	6	3	$\boxed{0}$	5	2	7
5	5	3	1	7	5	3	1	7
6	6	5	4	3	2	1	$\boxed{0}$	7
7	7	7	7	7	7	7	7	7

Em conclusão:

$0_\mathcal{B}$	$1_\mathcal{B}$	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	0^{-1}	1^{-1}	2^{-1}	3^{-1}	4^{-1}	5^{-1}	6^{-1}	7^{-1}
7	0	6	5	4	3	2	1	0	7	0	$\times$	2	$\times$	4	$\times$	6	$\times$

Solução alternativa: $a \otimes b = 1_\mathcal{B} \Leftrightarrow a \otimes b = 0 \Leftrightarrow a + b + ab = 0 \Leftrightarrow a(1+b) + b = 0 \Leftrightarrow a(1+b) + 1 + b = 1 \Leftrightarrow (a+1)(b+1) = 1$. Logo, a é invertível em $\mathcal{B}$ sse $a+1$ é invertível em $\mathcal{A}$ (e o inverso de a em $\mathcal{B}$ é o inverso de $a+1$ em $\mathcal{A}$ menos uma unidade).

2. Divisores de zero: 1, 3, 5 (pois $1 \otimes 3 = 7 = 0_\mathcal{B}$ e $5 \otimes 3 = 7 = 0_\mathcal{B}$).

   Um elemento $a \neq 7$ é divisor de zero em $\mathcal{B}$ sse existe $b \neq 7$ tal que $a \otimes b = 7$. Mas

   $$a \otimes b = 7 \Leftrightarrow a + b + ab = 7 \Leftrightarrow a(1+b) + b = 7 \Leftrightarrow a(1+b) + 1 + b = 0 \Leftrightarrow (a+1)(b+1) = 0.$$

   Uma vez que em $\mathbb{Z}_8$, $x \neq 7$ sse $x + 1 \neq 0$, isto significa que um elemento a é divisor de zero em $\mathcal{B}$ sse $a+1$ é divisor de zero em $\mathcal{A}$.

   Solução alternativa: Uma vez que os divisores de zero em $\mathcal{A}$ são precisamente os números 2, 4 e 6, então a é divisor de zero em $\mathcal{B}$ sse $a+1$ é divisor de zero em $\mathcal{A}$.

3. Teremos que mostrar que em $\mathcal{B}$, $a \otimes b \in I$, isto é, $a + b + ab \in I$, implica $a \in I$ ou $b \in I$. Mas $a + b + ab \in I$ significa que $a + b + ab$ é um ímpar de $\mathbb{Z}_8$. Então, claramente, $a \in I$ ou $b \in I$, pois $a \notin I$ e $b \notin I$ significaria que a e b seriam pares e, consequentemente, $a + b + ab$ também.

   Solução alternativa: Este facto também é claramente visível na tabela da operação $\otimes$.

4. Uma vez que

   $$a \oplus I = b \oplus I \quad \text{sse} \quad a \oplus (\ominus b) \in I$$

   e, pela alínea 1, $\ominus b = 6 - b$, então:

   $$a \oplus I = b \oplus I \;\Leftrightarrow\; a + (\ominus b) + 1 \in I \;\Leftrightarrow\; a + 6 - b + 1 \in I \;\Leftrightarrow\; a - b + 7 \in I \;\Leftrightarrow\; a - b \in \{0, 2, 4, 6\}.$$

5. Dois:

   $$0 \oplus I = 2 \oplus I = 4 \oplus I = 6 \oplus I = \{0, 2, 4, 6\},$$

   $$1 \oplus I = 3 \oplus I = 5 \oplus I = 7 \oplus I = I.$$

   (Observe que $|\mathcal{B}| = 8$, $|I| = 4$ e $8/4 = 2$).