1. Averigúe se os seguintes conjuntos têm estrutura de anel para as operações indicadas. Em caso afirmativo, verifique se têm identidade, divisores de zero e estrutura de corpo.

   (a) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$, onde $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, com n número natural fixo, é o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com elementos num corpo $\mathbb{K}$, e $+$ e $\times$ denotam a adição e multiplicação usuais de matrizes, respectivamente.

   (b) $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n, \otimes_n)$, onde $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, com n número natural fixo, e $\oplus_n$ e $\otimes_n$ denotam respectivamente a adição e multiplicação módulo n.

   (c) $(A, \oplus, \otimes)$, sendo $(A, +, \cdot)$ um anel com identidade (que denotamos por 1) e

   $$a \oplus b = a + b + 1,\ \forall a, b \in A,$$

   $$a \otimes b = a + b + a \cdot b,\ \forall a, b \in A.$$

   (d) $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$, onde $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de um conjunto não vazio X e

   $$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B),\ \forall A, B \in \mathcal{P}(X).$$

   (e) $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$, sendo

   $$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

   o conjunto dos *inteiros de Gauss* e $+$ e $\times$ a adição e a multiplicação usuais de números complexos.

2. Quais das seguintes propriedades são válidas num anel arbitrário A? E num anel comutativo arbitrário?

   (a) $a^m a^n = a^{m+n},\ \forall a \in A,\ \forall m, n \in \mathbb{N}$.

   (b) $(a^m)^n = a^{mn},\ \forall a \in A,\ \forall m, n \in \mathbb{N}$.

   (c) $(ab)^m = a^m b^m,\ \forall a, b \in A,\ \forall m \in \mathbb{N}$.

3. Sendo A um anel e $a \in A - \{0\}$, prove que

   $$a \text{ não é um divisor de zero à esquerda} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, b, c \in A\ [ab = ac \Rightarrow b = c].$$

4. Seja A um anel com identidade 1 e não tendo divisores de zero. Para $a, b \in A$ mostre que:

   (a) $ab = 1$ se e só se $ba = 1$.

   (b) Se $a^2 = 1$ então $a = 1$ ou $a = -1$.

5. Um elemento a de um anel A diz-se *idempotente* se $a^2 = a$ e *nilpotente* se $a^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:

   (a) Um elemento idempotente diferente de zero não pode ser nilpotente.

   (b) Qualquer elemento nilpotente diferente de zero é um divisor de zero.

6. Seja D um domínio de integridade. Mostre que:

   (a) Para cada $d \in D - \{0\}$, a aplicação $\phi_d : D \to D$, definida por $\phi_d(x) = dx$, é injectiva.

   (b) Se D é finito, então D é um corpo.

7. Sejam a e b dois elementos de um anel comutativo A com identidade. Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i, \quad \text{onde } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \ .$$

8. Averigúe quais dos seguintes conjuntos são subanéis ou ideais dos anéis indicados.

   (a) O conjunto dos inteiros pares em $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

   (b) O conjunto dos inteiros ímpares em $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

   (c) O conjunto dos números reais de forma $a + b\sqrt{2}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, em $(\mathbb{R}, +, \times)$.

   (d) O conjunto dos números complexos da forma ib, com $b \in \mathbb{R}$, em $(\mathbb{C}, +, \times)$.

   (e) O conjunto dos números inteiros em $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

9. Verifique que $\mathbb{Z} \times \{0\}$ é um subanel de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \times)$ e que $\mathbb{Z} \times \{0\}$ tem identidade diferente da identidade de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \times)$.

10. Chama-se *centro* de um anel A ao conjunto $\{x \in A \mid xa = ax, \forall a \in A\}$. Mostre que o centro de A é um subanel do anel A. Será um ideal?

11. Considere no conjunto $C = \{0, 1, \alpha, \beta\}$ as operações $+$ e $\cdot$ definidas pelas tabelas

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

    Prove que $(C, +, \cdot)$ é um corpo e determine todos os seus subcorpos.

12. Determine os ideais do anel $\mathbb{Z}_n$ para
    (a) $n = 4$; (b) $n = 11$; (c) $n = 12$; (d) $n = 16$.

13. Considere o anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Prove que o ideal gerado por $p \in \mathbb{N} - \{1\}$ é um ideal primo se e só se p é um número primo.

14. Sejam D um domínio de integridade e a e b elementos de D. Mostre que $\langle ab \rangle \subseteq \langle a \rangle$ e descubra uma condição necessária e suficiente para que $\langle ab \rangle = \langle a \rangle$.

15. (a) Qual é o menor subanel de $\mathbb{Z}$ que contém o 3? E o menor ideal?

    (b) Qual é o menor subanel de $\mathbb{R}$ que contém o $\frac{1}{2}$? E o menor ideal?

16. Considere os ideais $\langle 2 \rangle$, $\langle 4 \rangle$ e $\langle 5 \rangle$ do anel $\mathbb{Z}$. Determine o anel quociente respectivo e averigue se se trata de um corpo.

17. Seja A o anel $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ das funções reais de variável real, onde

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \text{ e } \ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

   (a) Determine os divisores de zero de A.

   (b) Mostre que $I = \{f \in A \mid f(5) = 0\}$ é um ideal de A. É primo?

   (c) Determine o anel quociente A/I.

18. Dado um anel $(A, +, \cdot)$, seja $\mathcal{F} = (A^A, +, \cdot)$ o anel das funções $A \to A$ com a adição e multiplicação definidas do seguinte modo:

$$\forall\, f, g \in \mathcal{F} \ \ \forall\, x \in A \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

   Para cada $(a, b) \in A \times A$ considere o conjunto $\mathcal{F}_{(a,b)} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) = b\}$.

   (a) Prove que $\mathcal{F}_{(a,b)}$ é um subanel de $\mathcal{F}$ se e só se $b = 0$.

   (b) Mostre que $\mathcal{F}_{(a,0)}$ é um ideal de $\mathcal{F}$.

   (c) Prove que o anel quociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{(a,0)}$ é isomorfo a A.

19. (a) Recorde o Exercício 1(d). Mostre que $\mathcal{P}(S)$ é um ideal de $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ para qualquer $S \subseteq X$.

   (b) Determine o anel quociente $\mathcal{P}(X)/\mathcal{P}(S)$ e compare-o com o anel $(\mathcal{P}(X - S), \Delta, \cap)$.

20. Quais das seguintes funções são homomorfismos de anéis?

   (a) $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ a & \mapsto & a^2 \end{array}$

   (b) $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_3 & \to & \mathbb{Z}_3 \\ a & \mapsto & a^3 \end{array}$

   (c) $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ a & \mapsto & 5a \end{array}$

   (d) $\begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}_n \\ a & \mapsto & \text{resto da divisão de } a \text{ por } n \end{array}$

   (e) $\begin{array}{ccl} \mathbb{Z}[i] & \to & \mathbb{Z} \\ a+ib & \mapsto & a^2+b^2, \end{array}$ sendo $\mathbb{Z}[i]$ o anel dos inteiros de Gauss (Exercício 1(e)).

   (f) A função $\theta : \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \longrightarrow \{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, definida por $\theta(a+b\sqrt{2}) = a+b\sqrt{3}$.

Exercícios mais avançados (com soluções em anexo)

1*. Seja $A = (\mathbb{Q}, +, *)$, onde $+$ denota a adição usual de racionais e $*$ é definida por $a * b = ab/3$.

   (a) Mostre que A é um corpo.

   (b) Determine um subanel de A que seja isomorfo ao anel usual $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dos inteiros, descrevendo o isomorfismo.

2*. Prove que se A é um anel, I e J são ideais de A e P é um ideal primo de A, então

$$IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P \text{ ou } J \subseteq P.$$

(Observação: IJ denota o conjunto $\{ab \mid a \in I, b \in J\}$.)

3*. Seja M um ideal próprio de um anel comutativo com identidade A. Prove que M é maximal se e só se

$$\forall\, a \in A - M \;\; \exists\, x \in A \,:\, 1 - ax \in M.$$

4*. Seja A um anel com identidade no qual todo o elemento a satisfaz $a^2 = a$. Mostre que:

(a) $-a = a$, para todo o $a \in A$.

(b) A é comutativo.

(c) As seguintes condições são equivalentes, para qualquer ideal I de A não nulo:
(i) I é primo. (ii)$A/I \cong \mathbb{Z}_2$. (iii) I é maximal.

5*. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Considere o conjunto

$$\mathscr{N}(A) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\}.$$

(a) Calcule $\mathscr{N}(\mathbb{Z})$ e $\mathscr{N}(\mathbb{Z}_{16})$.

(b) Mostre que:

(i) $\mathscr{N}(A)$ é um ideal de A.

(ii) Para qualquer ideal primo I de A, $\mathscr{N}(A) \subseteq I$.

(iii) $\mathscr{N}(A/\mathscr{N}(A)) = \{\mathscr{N}(A)\}$.

6*. Seja D um domínio de integridade e considere no conjunto $S = D \times (D \setminus \{0\})$ a relação

$$(a, b) \sim (c, d) \equiv ad = bc.$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em S.

(b) Denote a classe de equivalência $\{(c, d) \in S \mid (c, d) \sim (a, b)\}$ por a/b, ou $\dfrac{a}{b}$, e o conjunto de todas as classes de equivalência $\{a/b \mid (a, b) \in S\}$ por K. Prove que

$$a/b + c/d = (ad + bc)/bd \quad \text{e} \quad a/b \cdot c/d = ac/bd$$

definem operações em K que lhe dão uma estrutura de corpo (o chamado *corpo das fracções* ou *quocientes* de D).

(c) No caso $D = \mathbb{Z}$ que corpo é K?

(d) Mostre que $D' = \{a/1 \mid a \in D\}$ é um subanel de K isomorfo a D e que para cada $x \in K$ existem $a, b \in D'$ com $b \neq 0$ tais que $x = ab^{-1}$.

(e) Prove que K é o menor subcorpo de K que contém D'.
Conclua que o corpo dos quocientes K de um domínio de integridade D é o menor corpo (a menos de isomorfismo) contendo D (no sentido de que não existe nenhum corpo L tal que $D \subset L \subset K$).