

1. Determine o produto dos polinómios  $f(x)$  e  $g(x)$  do anel  $A[x]$ , sendo:

(a)  $f(x) = 2x^5 + 1$ ,  $g(x) = 2x^5 + 1$  e  $A = \mathbb{Z}_4$ .

(b)  $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$ ,  $g(x) = 3x - 3$  e  $A = \mathbb{Z}_6$ .

(c)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ ,  $g(x) = 4x - 5$  e  $A = \mathbb{Z}_8$ .

2. Mostre que:

(a) Se  $A$  é um subanel de um anel  $B$ , então  $A[x]$  é um subanel de  $B[x]$ .

(b) O conjunto dos *polinómios homogéneos* sobre um anel  $A$ ,  $\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in A \right\}$ , é um ideal de  $A[x]$ .

3. Sejam  $D$  um domínio de integridade e  $f(x)$  um elemento não nulo de  $D[x]$ . Prove que  $f(x)$  é invertível se e só se  $\text{gr}(f(x)) = 0$  e  $f(x)$  for invertível considerado como elemento de  $D$ . Conclua que se  $K$  for um corpo, então os únicos elementos invertíveis de  $K[x]$  são os polinómios de grau zero. Este resultado é válido se  $D$  for um anel comutativo qualquer?

4. Sendo  $f(x)$  e  $g(x)$  elementos de  $K[x]$ , determine o quociente e o resto da divisão de  $f(x)$  por  $g(x)$ , para:

(a)  $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$ ,  $g(x) = x^2$  e  $K = \mathbb{Q}$ .

(b)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ ,  $g(x) = x + 2$  e  $K = \mathbb{Z}_3$ .

(c)  $f(x) = x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5$ ,  $g(x) = 2x^3 - 2$  e  $K = \mathbb{Z}_7$ .

5. Sejam  $A$  um anel comutativo com identidade e  $a$  um elemento fixo de  $A$ . Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_a : A[x] &\longrightarrow A \\ f &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

onde  $f(a)$  denota o valor da função polinomial associada a  $f$  em  $a$ .

(a) Mostre que  $\phi_a$  é um homomorfismo de anéis.

(b) Determine o núcleo de  $\phi_a$ .

6. Determine todos os primos ímpares  $p$  para os quais  $x - 2$  divide  $x^4 + x^3 + x^2 + x$  em  $\mathbb{Z}_p[x]$ .

7. Mostre que se  $1 + i$  é raiz de  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ , então  $p(x)$  é divisível por  $x^2 - 2x + 2$  em  $\mathbb{R}[x]$ .

8. Em cada uma das alíneas seguintes determine, em  $\mathbb{R}[x]$ ,  $d(x) = \text{mdc}(f(x), g(x))$  e  $u(x)$ ,  $v(x) \in \mathbb{R}[x]$  tais que  $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ .

(a)  $f(x) = x^3 + 1$  e  $g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ .

(b)  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 5$  e  $g(x) = x^2 + x - 2$ .

(c)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 8$  e  $g(x) = x^4 - 4$ .

9. Quais dos seguintes subconjuntos de  $\mathbb{Q}[x]$  são ideais de  $\mathbb{Q}[x]$ ? (Em caso afirmativo, calcule  $p(x)$  mónico tal que  $J = \langle p(x) \rangle$ .) Quais desses ideais são maximais?

- (a)  $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(1) = f(7) = 0\}$ .
- (b)  $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(2) = 0 \text{ e } f(5) \neq 0\}$ .
- (c)  $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\sqrt{3}) = 0\}$ .
- (d)  $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(4) = 0 \text{ e } f(0) = f(1)\}$ .

10. Averigüe se os ideais  $\langle x \rangle$  e  $\langle 2, x \rangle$  do domínio  $\mathbb{Z}[x]$  são principais, primos ou maximais.

11. Determine  $K[x]/\langle f(x) \rangle$  e escreva as respectivas tabelas de anel para:

- (a)  $K = \mathbb{Z}_2$  e  $f(x) = x$ .
- (b)  $K = \mathbb{Z}_2$  e  $f(x) = x^2 + x + 1$ .
- (c)  $K = \mathbb{Z}_3$  e  $f(x) = x^2 + 2$ .

12. Considere o polinómio  $p(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ . Mostre que  $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x) \rangle$  é um corpo e descreva os seus elementos. Qual é o cardinal deste corpo?

13. Sendo  $K$  um corpo, prove que se  $f(x) \in K[x]$  é de grau 2 ou 3 e não tem raízes em  $K$  então  $f(x)$  é irredutível sobre  $K$ . Mostre que a recíproca é válida para polinómios de grau  $\geq 2$ .

14. Indique, justificando, quais dos seguintes polinómios são irredutíveis sobre  $\mathbb{Q}$ :

$$p(x) = 5x^5 - 10x^3 + 6x^2 - 2x + 6, \quad q(x) = x^4 - x^2 - 2, \quad r(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}.$$

15. Determine a factorização do polinómio  $q(x) = x^4 + x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  em factores irredutíveis.

16. Averigüe quais dos seguintes polinómios de  $\mathbb{Z}[x]$  são irredutíveis sobre  $\mathbb{Q}$  (em caso negativo, factorize-os como produto de polinómios irredutíveis):

- (a)  $x^3 - x + 1$ .
- (b)  $x^3 - 2x - 1$ .
- (c)  $x^3 - 2x^2 + x + 15$ .
- (d)  $x^7 + 11x^3 + 33x + 22$ .
- (e)  $x^5 + 2$ .
- (f)  $x^3 + 2x^2 + 10$ .
- (g)  $2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15$ .

17. Determine todas as raízes racionais dos seguintes polinómios em  $\mathbb{Q}[x]$ :

- (a)  $x^{50} - x^{20} + x^{10} - 1$ .
- (b)  $2x^2 - 3x + 4$ .
- (c)  $\frac{1}{2}x^3 - 5x + 2$ .
- (d)  $x^3 - 7x + 3$ .

18. Mostre que, para quaisquer  $a, b \in \mathbb{Z}$ , o polinómio  $x^3 + (2a + 1)x + (2b + 1)$  é irredutível sobre  $\mathbb{Q}$ .

19. O anel quociente  $\mathbb{Q}[x]/\langle 2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15 \rangle$  é um corpo?

20. Para cada um dos seguintes ideais  $I$  de  $\mathbb{Z}_2[x]$

(a)  $\langle x^3 + x + 1 \rangle$

(b)  $\langle x^2 \rangle$

justifique se  $\mathbb{Z}_2[x]/I$  é um corpo. Construa as tabelas de  $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ .

## Exercícios mais avançados

1\*. Seja  $K$  um corpo. Mostre que se  $\varphi : K[x] \rightarrow K[x]$  é um isomorfismo tal que  $\varphi(a) = a$  para qualquer  $a \in K$ , então  $\varphi(x) = cx + d$  para algum par  $c, d \in K$ .

2\*. Seja  $K$  um corpo finito. Mostre que  $K[x]$  contém polinômios irredutíveis de grau tão grande quanto se queira. [Sugestão: Imita a prova de Euclides da existência de um número infinito de primos].

3\*. Seja  $K$  um corpo. Mostre que se  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  é irredutível em  $K[x]$ , também  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  o é.

4\*. Seja  $A$  um anel e  $c \in A$ .

(a) Mostre que a correspondência  $p(x) \mapsto p(x + c)$  define um automorfismo do anel  $A[x]$ .

(b) Conclua que se  $A$  é um corpo, então  $p(x)$  é irredutível em  $A[x]$  se e só se  $p(x + c)$  é.

5\*. Usando o critério de Eisenstein, prove que, se  $n > 1$  e  $p_1, p_2, \dots, p_k$  são números primos distintos dois a dois, então  $\sqrt[n]{p_1 p_2 \dots p_k}$  é um número irracional. Será indispensável exigir que os números  $p_1, p_2, \dots, p_k$  sejam todos distintos?

6\*. Seja  $p$  um inteiro primo. Prove que o *polinômio ciclotômico*

$$\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

é irredutível em  $\mathbb{Q}[x]$ .