1. Suponhamos que $d(x)$ tem grau n. Como provámos nas aulas, para podermos dividir $a(x)$ por $d(x)$ é necessário que o coeficiente d_n do termo de maior grau de $d(x)$ seja invertível. Assim, em $\mathbb{Z}_9[x]$, d_n não pode ser igual a 3 e a 6 (pois $\text{mdc}(3,9) = 3 \neq 1$ e $\text{mdc}(6,9) = 3 \neq 1$, logo 3 e 6 não são invertíveis). Portanto, é possível fazer a divisão em $\mathbb{Z}_9[x]$ por qualquer polinómio cujo coeficiente do termo de maior grau pertence ao conjunto $\{1,2,4,5,7,8\}$.

2. (a) Por um teorema estudado nas aulas, $I = \langle a(x), b(x)\rangle = \langle \text{mdc}(a(x), b(x))\rangle$. Então $m(x) = \text{mdc}(a(x), b(x))$. Calculemo-lo, usando o algoritmo de Euclides. Como

$$a(x) = b(x)(x^2 + x + 1) + 3x^2 - 21 \quad \text{e} \quad b(x) = (3x^2 - 21)\Big(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\Big) + 0$$

então, pelo Algoritmo de Euclides, $\text{mdc}(a(x), b(x))$ é o polinómio mónico associado de $3x^2-21$, isto é, $x^2 - 7$. Logo, $m(x) = x^2 - 7$.

(b) Por outro teorema estudado nas aulas sabemos que um ideal principal $I = \langle m(x)\rangle$ de $\mathbb{Q}[x]$ é maximal se e só se $m(x)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$. No caso presente, $m(x) = x^2 - 7$ é claramente irredutível: é de grau 2 e não tem raízes racionais (as suas duas raízes, $\sqrt{7}$ e $-\sqrt{7}$ são irracionais); em alternativa, podemos também usar o critério de Eisenstein ($p = 7$).

Em conclusão, a resposta é afirmativa: I é maximal.

(c) Sim, tem inverso, pois I sendo maximal, implica, como sabemos, que $\mathbb{Q}[x]/I$ seja um corpo.

Determinemos o inverso de $1 + x + I$ em $\mathbb{Q}[x]/I$. Como

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[x]/I &= \{p(x) + I \mid p(x) \in \mathbb{Q}[x]\} = \{r(x) + I \mid r(x) \in \mathbb{Q}[x],\ \text{gr}(r(x)) \leq 1\}\\ &= \{a + bx + I \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \qquad (*)\end{aligned}$$

bastará determinar $a + bx + I \in \mathbb{Q}[x]/I$ tal que $(1 + x + I)(a + bx + I) = 1 + I$. Para isso teremos que determinar $a, b \in \mathbb{Q}$ tais que $a+(a+b)x+bx^2+I = 1+I$. Como $x^2+I = 7+I$, então $bx^2+I = 7b+I$, pelo que o problema resume-se à determinação de racionais a, b tais que $(a+7b)+(a+b)x+I = 1+I$, ou seja, $a + 7b = 1$ e $a + b = 0$ (porque as classes de polinómios de grau ≤ 1 em $(*)$ são todas distintas). Daqui sai imediatamente $a = -\frac{1}{6}$ e $b = \frac{1}{6}$. Portanto,

$$(1 + x + I)^{-1} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}x + I.$$