

1. Sejam K um subcorpo de um corpo L e α, β elementos de L . Prove que $K(\alpha, \beta) = K(\alpha)(\beta)$. Generalize para o caso de n elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$.
2. Sejam K um subcorpo de um corpo L e θ um elemento de L . Prove que se θ é algébrico sobre K , o mesmo sucede a $\theta + c$ e a $c\theta$, qualquer que seja $c \in K$.
3. Averigüe quais dos seguintes elementos são algébricos ou transcendentos sobre o corpo \mathbb{Q} :
(a) $\sqrt{7}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) π^2 (d) $e + 3$ (e) $1 + i$.
4. π é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\pi^3)$?
5. Mostre que \mathbb{C} é uma extensão algébrica de \mathbb{R} .
6. Determine o polinómio mínimo sobre \mathbb{Q} dos seguintes elementos:
(a) $2 + \sqrt{3}$.
(b) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.
(c) $\theta^2 - 1$, sendo θ uma raiz do polinómio $x^3 - 2x - 2$.
(d) $\theta^2 + \theta$, onde $\theta^3 = -3\theta^2 + 3$.
7. Qual é o polinómio mínimo do número real $\theta = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$ sobre o corpo \mathbb{Q} ? E sobre o corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$?
8. Sejam K um subcorpo de um corpo L e θ um elemento de L . Prove que θ é algébrico sobre K se e só se o mesmo sucede a θ^2 .
9. Prove que:
(a) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
(b) $i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
(c) $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(i)$.
(d) $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
10. Determine o inverso de cada um dos seguintes elementos nas extensões simples $\mathbb{Q}(\theta)$ indicadas:
(a) $2 + \sqrt[3]{4}$ em $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
(b) $1 - 2\theta + 3\theta^2$, onde θ é raiz do polinómio $x^3 - x + 1$.
(c) $-\theta^2 + 2\theta - 3$, para $\theta = \sqrt[3]{2}$.
(d) $\theta + 1$ e $\theta^2 - 6\theta + 8$, onde $\theta \neq 0$ é tal que $\theta^4 - 6\theta^3 + 9\theta^2 + 3\theta = 0$.
11. Exprima os seguintes elementos das extensões algébricas $\mathbb{Q}(\theta)$ indicadas em função da sua base:
(a) θ^4, θ^5 e $\theta^5 - \theta^4 + 2$, onde θ é raiz do polinómio $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$.
(b) $(\theta^3 + 2)(\theta^3 + 3\theta)$, sendo θ uma raiz do polinómio $x^5 + 2x + 2 = 0$.
(c) $\frac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$, onde θ é uma raiz não nula do polinómio $x^4 - x^3 + x^2 - 2x$.

12. Seja L uma extensão finita de K . Prove que:
- Se $[L : K]$ é um número primo, então L é uma extensão simples de K .
 - Se $\theta \in L$, então o grau de θ é um divisor de $[L : K]$. Conclua que se tem $L = K(\theta)$ se e só se o grau de θ coincidir com $[L : K]$.
 - Se $f(x) \in K[x]$ é irredutível sobre K e o grau de $f(x)$ é um número primo com $[L : K]$ e maior do que 1, então $f(x)$ não tem raízes em L .
13. Averigüe se os seguintes polinômios são irredutíveis sobre o corpo indicado:
- $x^2 + 2$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
 - $x^2 - 2x + 2$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.
 - $x^3 - 3x + 3$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
14. Determine o grau sobre \mathbb{Q} e uma base de cada uma das seguintes extensões de \mathbb{Q} :
- $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$.
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{18}, \sqrt[4]{2})$.
 - $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \theta)$, onde $\theta^4 + 6\theta + 2 = 0$.
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \theta)$, onde $\theta^3 + 3 = 0$.
 - $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, onde $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0$ e $\beta^2 - \beta = 1$.
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \alpha)$, onde $3\alpha^3 + 7\alpha^2 = 14\alpha - 56$.
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \theta)$ sendo θ uma raiz do polinômio $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ tal que $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] > 1$.
15. Será que $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}) : \mathbb{Q}]$ é igual a 8?
16. Seja p um inteiro primo positivo. Determine $[\mathbb{Q}(\sqrt{p + \sqrt{p}}) : \mathbb{Q}]$.
17. Mostre que $x^2 + 1$ é irredutível sobre \mathbb{Z}_3 . Sendo u uma raiz deste polinômio determine o número de elementos de $\mathbb{Z}_3(u)$ e as tabelas de adição e multiplicação.
18. Considere $\mathbb{Z}_5(\alpha)$, sendo $\alpha^2 + 3 = 0$, e determine:
- a expressão geral dos elementos desse corpo e o seu cardinal.
 - o polinômio mínimo de $\beta = \alpha + 1$.
 - o inverso de β .
19. Para cada uma das extensões de \mathbb{Q} indicadas averigüe se θ gera a mesma extensão:
- $\theta = 2 + \sqrt[3]{4}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
 - $\theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
 - $\theta = u^2 + u + 1$, $\mathbb{Q}(u)$, com $u^2 + 5u - 5 = 0$.
20. Considere o polinômio $f(x) = x^3 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Seja θ uma raiz de $f(x)$.
- Determine o inverso de $\theta + 1$ em $\mathbb{Q}(\theta)$, escrevendo-o como polinômio em θ de coeficientes racionais.
 - Considere $u = \theta^2 + 1$. As extensões $\mathbb{Q}(u)$ e $\mathbb{Q}(\theta)$ coincidem?
21. Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

22. Considere o polinómio $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$ sobre \mathbb{Q} .
- Mostre que $p(x)$ é irreduzível sobre \mathbb{Q} .
 - Construa uma extensão de decomposição de $p(x)$ e determine a sua dimensão.
23. Determine a extensão de decomposição de:
- $x^2 - 5$ sobre \mathbb{Q} .
 - $x^2 + 1$ sobre \mathbb{R} .
 - $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 25x - 50$ sobre \mathbb{Q} .
24. Determine o grupo dos automorfismos de \mathbb{Q} e de \mathbb{Z}_p (p primo).
25. Determine os \mathbb{Q} -automorfismos de L para:
- $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
 - $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
26. Seja θ uma raiz de $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Mostre que $\Phi : \mathbb{Z}_2(\theta) \rightarrow \mathbb{Z}_2(\theta)$ definido por $\Phi(a + b\theta) = a + b + b\theta$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}_2$, é um \mathbb{Z}_2 -automorfismo de $\mathbb{Z}_2(\theta)$.
27. Considere o polinómio $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Determine:
- A factorização de $p(x)$ em factores irreduzíveis em $\mathbb{Q}[x]$.
 - O corpo de decomposição de $p(x)$.
 - O grupo de Galois de $p(x)$ sobre \mathbb{Q} . Apresente-o como subgrupo de S_4 .
28. Seja θ a raiz real do polinómio $x^5 - 7$. Determine o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\theta)$ de \mathbb{Q} .
29. Calcule o grupo de Galois do polinómio $f(x)$ sobre o corpo K nos seguintes casos:
- $f(x) = x^2 + 1$, $K = \mathbb{R}$.
 - $f(x) = x^3 - x + 1$, $K = \mathbb{Q}$.
30. (a) Para as extensões L de \mathbb{Q} do Exercício 25, calcule os respectivos grupos de Galois, $Gal(L, \mathbb{Q})$.
 (b) Verifique em quais desses casos a correspondência de Galois entre os subgrupos do grupo de Galois e as extensões intermédias (entre \mathbb{Q} e L) é uma bijecção.
31. Considere a extensão $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$ de \mathbb{Q} .
- Como se define o grupo de Galois de L (sobre \mathbb{Q})? Determine-o.
 - Indique todas as extensões intermédias de \mathbb{Q} em L .
 - L é uma extensão de Galois de \mathbb{Q} ? Justifique.

Exercícios mais avançados

- 1*. Sejam K, K_1 e K_2 corpos com $K \subseteq K_i$ ($i = 1, 2$). Se K_1 e K_2 são extensões finitas de K tais que $[K_1 : K]$ e $[K_2 : K]$ são primos entre si, então $K_1 \cap K_2 = K$.
- 2*. Sejam $\alpha^3 = 2$, w uma raiz cúbica da unidade e $\beta = w\alpha$. Determine a dimensão e uma base de $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ sobre \mathbb{Q} .

- 3*. (a) Determine os corpos intermédios entre \mathbb{Q} e $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.
 (b) Calcule o respectivo grupo de Galois e compare os resultados.
- 4*. Seja L uma extensão algébrica simples de K , $\alpha \in L - K$ e $\Phi \in \text{Gal}(L, K)$. Mostre que α e $\Phi(\alpha)$ têm o mesmo polinómio mínimo sobre K .
- 5*. Calcule o grupo de Galois do polinómio $x^4 - 2$ sobre o corpo \mathbb{Q} .
- 6*. Considere um polinómio $f(x)$ irredutível, de grau 3, escrito na sua forma reduzida $x^3 + px + q$, e as suas três raízes complexas distintas a, b e c .
- (a) Verifique que
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + ac + bc = p \\ abc = -q \end{cases} .$$
- (b) A partir da alínea anterior, mostre que $((a - b)(a - c)(b - c))^2 = -4p^3 - 27q^2$.
- (c) Seja D o número $-4p^3 - 27q^2$ da alínea anterior. Prove que se $\sqrt{D} \in \mathbb{Q}$ e $\Phi \in \text{Gal}(f(x), \mathbb{Q})$, então $\Phi(\sqrt{D}) = \sqrt{D}$ e portanto $\text{Gal}(f(x), \mathbb{Q}) \cong \mathcal{A}_3$.
- (d) Prove que se $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$, então $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ está na extensão de decomposição de $f(x)$ e, portanto, $\text{Gal}(f(x), \mathbb{Q}) \cong \mathcal{S}_3$.
- 7*. Mostre que se os grupos A e B são resolúveis, então $A \times B$ também é resolúvel. Conclua que se os factores irredutíveis de um polinómio são resolúveis por radicais, então ele também é resolúvel por radicais.
- 8*. Sejam $p \geq 5$ um número primo, e $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinómio irredutível de grau p . Mostre que:
- (a) se $f(x)$ tem exactamente duas raízes complexas não reais, então $\text{Gal}(f(x), \mathbb{Q})$ é o grupo simétrico \mathcal{S}_p e portanto $f(x)$ não é resolúvel por radicais.
- (b) se $f(x)$ tem exactamente quatro raízes complexas não reais, então não é resolúvel por radicais.
- 9*. Mostre que os seguintes polinómios $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ não são resolúveis por radicais:
- (a) $f = 2x^5 - 10x + 5$. (c) $f = x^5 - 6x^2 + 5$.
 (b) $f = 2x^5 - 5x^4 + 20$. (d) $f = x^7 - 10x^5 + 15x + 5$.