DMUC **Teste de Corpos e Equações Algébricas - A**

Duração: 1h | *Justifique convenientemente as suas respostas* | 14/03/2022

---

1. Considere o anel comutativo com identidade $(A, +, \cdot)$ das funções $f\colon \{1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}_6$, com as operações

$$(f + g)(x) = f(x) +_6 g(x) \quad \text{e} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \times_6 g(x) \quad \forall x \in \{1, 2, 3\}.$$

   (a) Indique um divisor de zero de A que tenha duas imagens diferentes de zero.

   (b) Determine todos os elementos invertíveis de A.

   (c) Seja $I = \{f \in A \mid f(2) = f(3) = 0\}$. Mostre que I é um ideal principal de A. Averigúe se é primo.

   (d) Determine o número de elementos do anel A/I.

2. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e $a, b, c \in A$.

   (a) Prove que se $a \neq 0$ não é divisor de zero então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.

   (b) Mostre que se A tem identidade 1_A então todo o elemento da forma

$$na = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}}$$

   se pode escrever na forma $x \cdot a$ para algum $x \in A$.

   Apresente um contra-exemplo que mostre que isso já não é necessariamente verdade no caso em que A não tem identidade.

   (c) Suponha agora que o anel A é comutativo e tem identidade. Seja I um ideal próprio de A com a propriedade

$$\forall a \in A \setminus I \ \exists b \in A\colon \ ab - 1 \in I.$$

   Mostre que I é maximal.