DMUC **Corpos e Equações Algébricas: 1^a Frequência**

Duração: 1h30m $\boxed{\textit{Justifique convenientemente as suas respostas}}$ 14/04/2023

---

1. Determine:

   (a) As raízes racionais do polinómio $p(x) = -x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 7x + 2$. Factorize $p(x)$ em factores irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$.

   (b) O máximo divisor comum de $x^2 + x + 1$ e $x^4 + x^3 + 1$ em $\mathbb{Z}_3[x]$.

   (c) A factorização de $q(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 20x + 15$ em elementos irredutíveis, em $\mathbb{Q}[x]$ e em $\mathbb{Z}_2[x]$.

2. Considere o ideal $I = \langle x^2 + 1 \rangle$ do anel $A = \mathbb{Z}_7[x]$.

   (a) Determine o anel quociente A/I, explicitando o seu conjunto e respectivas operações.

   (b) A/I é um corpo?

   (c) Determine o inverso de $\overline{x} := x + I$ em A/I.

3. Para as afirmações seguintes, escreva uma prova se a afirmação é verdadeira, caso contrário apresente uma justificação sucinta da sua falsidade:

   (a) Todo o ideal de $\mathbb{R}[x]$ é principal.

   (b) A divisão de polinómios é sempre possível em $\mathbb{Z}_6[x]$.

   (c) Os elementos irredutíveis de $C[x]$ são os polinómios de grau 1 se e só se qualquer $p(x) \in C[x]$ de grau ≥ 2 tem pelo menos uma raiz em C.

   Nota: C designa um corpo arbitrário.

   (d) O número real $\sqrt[n]{\frac{3}{4}}$ é irracional para qualquer $n \geq 2$.
