DMUC **Corpos e Equações Algébricas: Frequência**

Duração: 1h30m | *Justifique convenientemente as suas respostas* | 18/05/2023

---

1. Determine a factorização de
$$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$$
em factores irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$.

2. Seja θ uma raiz não racional de $p(x)$. Determine a extensão $\mathbb{Q}(\theta)$ de $\mathbb{Q}$.

3. Determine o inverso de $\theta^2 + 1$ no corpo $\mathbb{Q}(\theta)$.

4. Seja $\lambda = \theta^2 + 1$. Determine o polinómio mínimo de λ sobre $\mathbb{Q}$. As extensões $\mathbb{Q}(\lambda)$ e $\mathbb{Q}(\theta)$ coincidem?

5. Considere agora o polinómio
$$q(x) = x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x].$$
Determine a extensão de decomposição L de $q(x)$, e a factorização de $q(x)$ em factores lineares.

6. Determine o grupo de Galois de $q(x)$ sobre $\mathbb{Z}_2$, enumerando todos os $\mathbb{Z}_2$-automorfismos de L.

7. Seja $\alpha \neq 1$ uma raiz de $q(x)$ e seja β uma raiz do polinómio
$$r(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x].$$
Determine a extensão $\mathbb{Z}_2(\alpha, \beta)$ de $\mathbb{Z}_2$. Qual é a sua dimensão?

8. Seja $A_{\mathbb{Q}} = \{a + ib \in \mathbb{C} \colon a + ib \text{ é álgébrico sobre } \mathbb{Q}\}$. Mostre que:

   (a) $A_{\mathbb{Q}}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$.

   (b) $a + ib \in A_{\mathbb{Q}}$ se e só se os reais a e b são algébricos sobre $\mathbb{Q}$.
