Duração: 1h | *Justifique convenientemente as suas respostas* | 01/03/2023

---

1. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel com identidade 1.

   (a) Prove que se $a + 1$ não é divisor de zero então

   $$a^2 = 1 \iff a = 1 \text{ ou } a = -1. \qquad (*)$$

   Apresente um exemplo de um elemento num anel para o qual a equivalência $(*)$ não é verdadeira.

   (b) Defina ideal maximal de A. Qual dos seguintes ideais de $\mathbb{Z}$ é maximal: $\mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z}$ ou $5\mathbb{Z}$?

2. Considere o anel $A = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$.

   (a) Calcule em A os elementos $-(1,3)$ e $(1,5)^{-1}$.

   (b) Resolva a equação $(1,5)(x,y) = (2,3)$ em A.

   (c) Determine o conjunto dos divisores de zero de A.

   (d) Determine o conjunto das unidades (elementos invertíveis) de A.

   (e) Calcule os ideais principais $I = \langle (1,5) \rangle$ e $J = \langle (1,3) \rangle$ de A. Prove que J é primo.

   (f) Determine o anel quociente A/J. É um corpo?