Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Curvas e Superfícies**

Duração: 1h15m **Teste 2** 27/04/2012

Soluções

---

1. (a) Basta verificar que $(x-1)^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$ e

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (1+\cos t)^2+\sin^2 t+4\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big) \\ &= 1+2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t+4\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big) \\ &= 2+2\cos t+4\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big) \\ &= 2+2\cos\Big(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\Big)+4\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big) \\ &= 2+2\Big(\cos^2\Big(\frac{t}{2}\Big)-\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)+4\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big) \\ &= 2+2\cos^2\Big(\frac{t}{2}\Big)+2\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)=2+2=4. \end{aligned}$$

(b) $\gamma'(t)=(-\sin t,\cos t,\cos\frac{t}{2})$, $\gamma''(t)=(-\cos t,-\sin t,-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2})$ e $\gamma'''(t)=(\sin t,-\cos t,-\frac{1}{4}\cos\frac{t}{2})$, donde

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+\cos^2\Big(\frac{t}{2}\Big)},$$

$$\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)=\Big(-\frac{1}{2}\cos t\sin\frac{t}{2}+\sin t\cos\frac{t}{2},-\frac{1}{2}\sin t\sin\frac{t}{2}-\cos t\cos\frac{t}{2},1\Big),$$

$$\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|=\sqrt{1+\frac{1}{4}\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)+\cos^2\Big(\frac{t}{2}\Big)}$$

e

$$[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]=\sin^2 t\cos\frac{t}{2}+\cos^2 t\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\cos\frac{t}{2}=\frac{3}{4}\cos\frac{t}{2}.$$

De $\cos t=\cos(\frac{t}{2}+\frac{t}{2})=\cos^2(\frac{t}{2})-\sin^2(\frac{t}{2})=\cos^2(\frac{t}{2})-(1-\cos^2(\frac{t}{2}))=2\cos^2(\frac{t}{2})-1$ conclui-se que $\cos^2(\frac{t}{2})=\frac{1+\cos t}{2}$ e, consequentemente, $\sin^2(\frac{t}{2})=1-\cos^2(\frac{t}{2})=\frac{1-\cos t}{2}$. Então

$$\kappa(t)=\frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{\sqrt{1+\frac{1-\cos t}{8}+\frac{1+\cos t}{2}}}{(1+\frac{1+\cos t}{2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{13+3\cos t}}{(3+\cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\tau(t)=\frac{\frac{3}{4}\cos\frac{t}{2}}{1+\frac{1}{4}\sin^2(\frac{t}{2})+\cos^2(\frac{t}{2})}=\frac{\frac{3}{4}\cos\frac{t}{2}}{1+\frac{1-\cos t}{8}+\frac{1+\cos t}{2}}=\frac{\frac{3}{4}\cos\frac{t}{2}}{\frac{13+3\cos t}{8}}=\frac{6\cos\frac{t}{2}}{13+3\cos t}.$$

2. (a) Falsa:

A curva γ é plana se e só se a sua torsão $\tau(t)=\frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^2}$ for nula em todos os pontos. Mas

$$\begin{aligned} [\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)] &= \Big((1,2t,3t^2)\wedge(0,2,6t)\mid(0,0,6)\Big) \\ &= \Big((...,...,2)\mid(0,0,6)\Big) \\ &= 12\neq 0 \end{aligned}$$

pelo que γ não é plana.

(b) VERDADEIRA:

A recta normal tem a direcção do vector normal logo tem a mesma direcção que o vector $T'(t)$. Como este vector é paralelo a $\gamma''(t)$ basta então verificar que $\gamma''(t)$ é ortogonal a $(0,0,1)$, o que é óbvio pois $\gamma''(t) = (-r\cos t, -r\,\mathrm{sen}\,t, 0)$.

(c) VERDADEIRA:

Como $\alpha(t) = \beta'(t)$ e β está parametrizada por comprimento de arco, então $\alpha(t) = T_\beta(t)$. Consequentemente, $\alpha'(t) = \kappa_\beta(t)\,N_\beta(t)$ e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \kappa'_\beta(t)\,N_\beta(t) + \kappa_\beta(t)\,(-\kappa_\beta(t)\,T_\beta(t) + \tau_\beta(t)\,B_\beta(t)) \\ &= -\kappa_\beta(t)^2\,T_\beta(t) + \kappa'_\beta(t)\,N_\beta(t) + \kappa_\beta(t)\,\tau_\beta(t)\,B_\beta(t). \end{aligned}$$

(d) FALSA:

O gradiente $\nabla_f(x,y,z)$ de f no ponto (x,y,z) é o vector $(2x, 2y, -2z)$, que se anula exactamemente no ponto $(0,0,0)$. No entanto, este ponto pertence a $f^{-1}(\{0\})$.

(e) VERDADEIRA:

Seja $g\colon \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. É evidente que o domínio de g é um aberto de $\mathbb{R}^3$ e que $C = g^{-1}(\{0\})$. O gradiente $\nabla_g(x,y,z)$ de g no ponto (x,y,z) é o vector $(2x, 2y, -2z)$, que se anula no ponto $(0,0,0)$. Mas agora este ponto não pertence a $g^{-1}(\{0\})$, pelo que 0 é um valor regular de g. Logo $C = g^{-1}(\{0\})$ é uma superfície.