2. Contagem

2.1. Técnicas básicas

Neste capítulo começaremos por abordar os dois princípios gerais, intuitivamente claros, que fundamentam os raciocínios básicos que se fazem na resolução de problemas elementares de contagem.

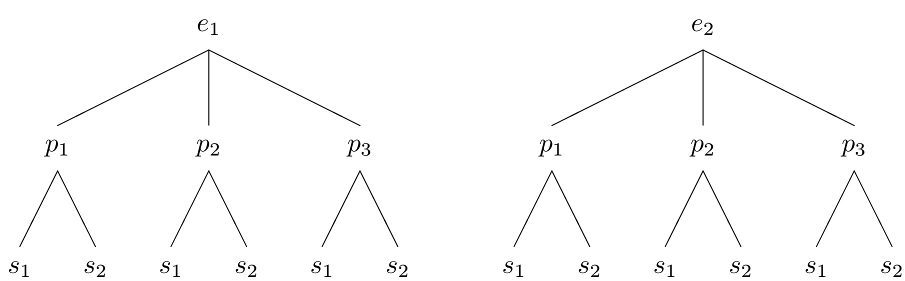
O princípio fundamental da contagem (chamado *princípio da multiplicação*) diz que se há p maneiras de fazer uma escolha E_1 e, feita a escolha E_1, há q maneiras de fazer a escolha E_2, então o número de maneiras de fazer sucessivamente as escolhas E_1 e E_2 é $p \times q$.

Mais geralmente:

> *Quando pretendemos realizar m escolhas múltiplas e existem p_1 possibilidades para a primeira escolha, p_2 possibilidades para a segunda escolha, etc., p_m possibilidades para a m-ésima escolha então se as escolhas forem combinadas livremente, o número total de possibilidades para o conjunto total das escolhas é igual a $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_m$.*

Exemplo. *O menu de um restaurante apresenta duas entradas, três pratos principais e duas sobremesas. Quantas ementas diferentes (com uma entrada, um prato principal e uma sobremesa) podemos escolher?*

Num problema tão simples podemos esquematizar as várias possibilidades e contá-las; se designarmos por $E = \{e_1, e_2\}$ o conjunto das entradas, por $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ o conjunto dos pratos principais e por $S = \{s_1, s_2\}$ o conjunto das sobremesas, o seguinte quadro mostra os resultados possíveis:



Portanto, $2 \times 3 \times 2 = 12$ é a solução do problema. O quadro dá-nos também imediatamente a enumeração de todos os casos possíveis: $\{e_1, p_1, s_1\}, \{e_1, p_1, s_2\}, \ldots, \{e_2, p_3, s_2\}$.

A justificação para o Princípio da Multiplicação é a seguinte:

Fazer a escolha E_1 significa escolher um elemento de um conjunto S_1 de cardinal p_1, fazer a escolha E_2 significa escolher um elemento de um conjunto S_2 de cardinal p_2, e assim sucessivamente, pelo que fazer a escolha sucessiva $E_1, E_2, \cdots, E_m$ significa tomar um elemento do produto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$. Logo o número de maneiras de fazer tal escolha é igual ao cardinal $|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m|$. Portanto o Princípio da Multiplicação assenta no seguinte facto, facilmente demonstrável por indução:

Princípio da Multiplicação. Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_m$ conjuntos finitos e $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$ o seu produto cartesiano. Então $|S| = |S_1| \times |S_2| \times \cdots \times |S_m|$.

Por outro lado, é evidente que o número de maneiras diferentes de escolher uma entrada ou um prato principal ou uma sobremesa é igual a $2 + 3 + 2 = 7$. Este raciocínio é um caso particular do chamado Princípio da Adição:

Princípio da Adição. Se $S_1, S_2, \ldots, S_m$ formarem uma partição de um conjunto finito S, ou seja, se $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $i \neq j$, então $|S| = \sum_{i=1}^{m} |S_i|$.

Caso alguns dos subconjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_m$ tenham intersecção não vazia, um princípio mais geral (o chamado Princípio da Inclusão-Exclusão) será necessário para contar os elementos de S. Estudaremos esse princípio mais adiante. Os princípios da multiplicação e da adição podem ser facilmente demonstrados pelo Princípio de Indução Matemática.

Teste 1. *Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, amarela e vermelha. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantas maneiras se pode colorir a bandeira?*

Solução. Colorir a bandeira equivale a escolher a cor de cada listra. Há 3 maneiras de escolher a cor da primeira listra e, a partir daí, 2 maneiras de escolher a cor de cada uma das outras 6 listras. Portanto a resposta é $3 \times 2^6 = 192$.

Teste 2. *Quantos são os números de três algarismos distintos?*

Solução. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 maneiras, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 maneiras, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 maneiras, pois não pode ser igual ao primeiro e segundo algarismos. A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Estes exemplos mostram-nos qual deve ser a estratégia para resolver problemas de contagem. Citando Elon Lages Lima[20]:

(1) *Postura.* Devemos sempre colocar-nos no papel da pessoa que deve fazer a acção solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No Teste 2, colocámo-nos no papel da pessoa que deveria escrever o número de três algarismos; no Teste 1, colocámo-nos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira.

(2) *Divisão.* Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada listra; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos.

[20] *A matemática do ensino médio*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

(3) *Não adiar dificuldades.* Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No Teste 2, a escolha do primeiro algarismo é uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro algarismo não pode ser igual a 0. Essa é portanto a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar; adiá-la só serve para causar problemas. Com efeito, começando a escolha dos algarismos pelo último, há 10 maneiras de escolher o último algarismo. Em seguida, há 9 maneiras de escolher o algarismo central, pois não podemos repetir o algarismo já usado. Agora temos um impasse: de quantas maneiras podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é "depende". Se antes não tivermos usado o zero, haverá 7 maneiras de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o zero nem os dois algarismos já usados; se já tivermos usado o zero, haverá 8 maneiras de escolher o primeiro algarismo. Isto mostra como algumas pessoas conseguem, por erros de estratégia, tornar complicadas as coisas mais simples.

Teste. *Quantos são os números pares de três algarismos distintos?*

Solução. Há 5 maneiras de escolher o último algarismo. Note que começamos pelo último algarismo, que é o mais restrito; o último algarismo só pode ser 0,2,4,6 ou 8. Em seguida, vamos ao primeiro algarismo. De quantas maneiras se pode escolher este algarismo? A resposta é "depende": se não tivermos usado o 0, haverá 8 maneiras de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo já usado na última posição; se já tivermos usado o 0, haverá 9 maneiras de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira posição.

Este tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para ultrapassá-lo. O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Comecemos pelos que terminam em 0. Há uma maneira de escolher o último algarismo, 9 maneiras de escolher o primeiro e 8 maneiras de escolher o algarismo central. Há assim $1 \times 9 \times 8 = 72$ números terminados em 0. Para os que não terminam em 0, há 4 maneiras de escolher o último algarismo, 8 maneiras de escolher o primeiro e 8 maneiras de escolher o algarismo central. Há pois $4 \times 8 \times 8 = 256$ números que não terminam em 0. A resposta final é $72 + 256 = 328$.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que tiver sido contado indevidamente. Em primeiro lugar fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira posição do número. Procedendo assim, há 5 maneiras de escolher o último algarismo (só pode ser 0,2,4,6, ou 8), 9 maneiras de escolher o primeiro algarismo (não podemos repetir o algarismo usado na última casa) e 8 maneiras de escolher o algarismo central. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí incluídos os que começam por 0. Por fim vamos determinar quantos desses números começam por 0; são esses os números que foram contados indevidamente. Há só uma maneira de escolher o primeiro algarismo (tem que ser 0), 4 maneiras de escolher o último (só pode ser 2,4,6, ou 8 — lembre-se que os algarismos são distintos) e 8 maneiras de escolher o algarismo central (não podemos repetir os algarismos já usados). Há assim $1 \times 4 \times 8 = 32$ números começados por 0. A resposta final é $360 - 32 = 328$.

É claro que este problema poderia ter sido resolvido com um truque. Para determinar quantos são os números pares de três algarismos distintos, poderíamos calcular os números de três algarismos distintos menos os números ímpares de três algarismos distintos.

Para os números de três algarismos distintos, há 9 maneiras de escolher o primeiro algarismo, 9 maneiras de escolher o segundo e 8 maneiras de escolher o último. Portanto há $9 \times 9 \times 8 = 648$ números de três algarismos distintos.

Para os números ímpares de três algarismos distintos, há 5 maneiras de escolher o último algarismo, 8 maneiras de escolher o primeiro e 8 maneiras de escolher o algarismo central. Há pois $5 \times 8 \times 8 = 320$ números ímpares de três algarismos distintos.

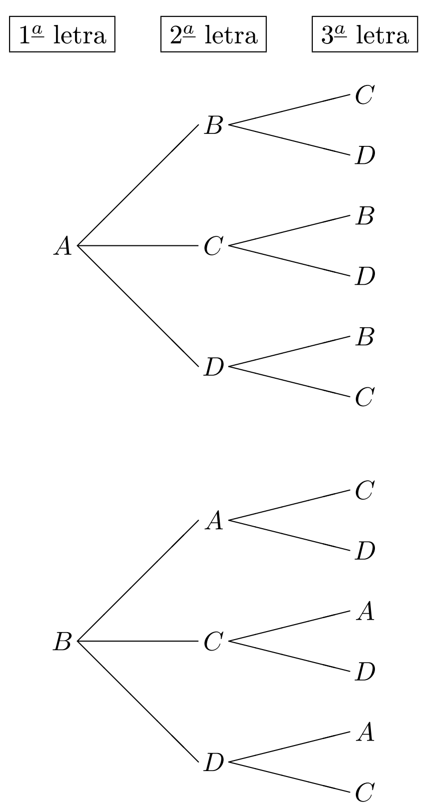
A resposta final é $648 - 320 = 328$.

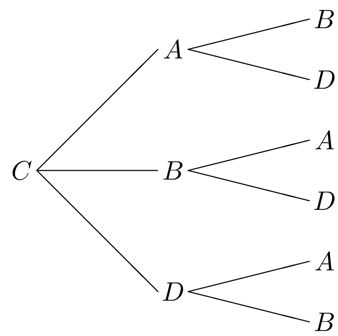
Alguns tipos de problemas de contagem, embora sejam aplicações do Princípio da Multiplicação, aparecem recorrentemente com muita frequência. Para esses problemas, vale a pena conhecer de cor fórmulas que forneçam imediatamente a resposta.

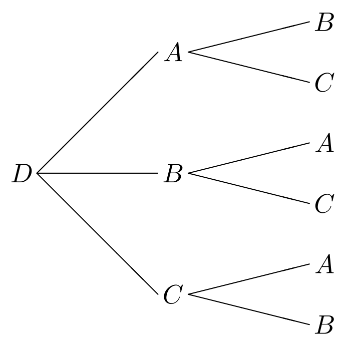
(1) *De um conjunto de 4 letras $\{A, B, C, D\}$, quantas sequências de 3 letras se podem formar se repetições de uma mesma letra não forem permitidas?*

(2) *Considere 4 pontos A, B, C, D num plano, tais que nenhum grupo de 3 esteja situado sobre uma mesma recta. Quantos triângulos diferentes podem ser construídos usando esses pontos como vértices?*

No primeiro problema temos $4 \times 3 \times 2$ hipóteses diferentes:







Note-se que neste caso a ordem pela qual se escrevem as letras na sequência é fundamental:

$$ABC \neq BAC \neq CAB.$$

No segundo problema já a ordem não interessará pois, por exemplo, as sequências de vértices

$$ABC,\ BAC,\ CAB$$

definem o mesmo triângulo (o que define um triângulo é o conjunto dos seus três vértices, e não a ordem pela qual os poderemos escrever).

Estes dois problemas revelam-nos duas estruturas diferentes, que ocorrem frequentemente, e que abordaremos de seguida, de uma maneira mais formal e sistemática.

Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto com n elementos. Uma *permutação dos n elementos de S, r a r* $(0 < r \leq n)$ é uma sequência **ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ de elementos de S. Assumimos que não há repetição de elementos nas sequências ordenadas. Denotaremos o número de permutações dos n elementos de S, r a r, por $P(n, r)$. Se $r = n$ diremos simplesmente que se trata de *permutações de n elementos*.

No exemplo (1) acima pedia-se o cálculo de $P(4, 3)$, que vimos ser igual a 24. Seja $S = \{a, b, c\}$. As permutações dos 3 elementos de S, 2 a 2, são

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).$$

Logo $P(3, 2) = 6$. As permutações de 3 elementos são $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$ e (c, b, a) pelo que $P(3, 3) = 6$.

É possível fazer estes cálculos no `Maple` com a ajuda da package `combinat`:

```
> with(combinat);
> numbperm(3, 2); numbperm(3, 3);
```

6
6

```
> permute([a, b, c],2);
```

$[[a, b], [a, c], [b, a], [b, c], [c, a], [c, b]]$

Proposição 1. *Para quaisquer inteiros positivos n e r tais que $r \leq n$,*

$$P(n, r) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1).$$

Prova. O primeiro elemento da sequência ordenada pode ser escolhido de entre n elementos diferentes. O segundo de entre $n-1$, e assim sucessivamente, até ao elemento na r-ésima posição que poderá ser escolhido de entre $n-(r-1) = n-r+1$ elementos diferentes. Logo, pelo Princípio da Multiplicação, a construção da sequência pode ser realizada de

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$

maneiras diferentes, ou seja, $P(n, r) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$. □

Convencionando que $0! = 1$, podemos reescrever a Proposição 1 do seguinte modo:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (n \geq r > 0).$$

Esta fórmula continua válida para $r = 0$ se definirmos $P(n, 0)$ $(n \geq 0)$ como sendo igual a 1 (correspondendo à permutação vazia). O caso particular $r = n$ diz-nos que o número $P(n, n)$ de permutações de n elementos é igual a $n!$.

Seja S um conjunto com n elementos. Uma *combinação dos n elementos de S, r a r*, com $0 < r \leq n$, é um subconjunto de S com r elementos (distintos, evidentemente). Denotaremos o número de combinações de n elementos, r a r, por $C(n, r)$ ou $\binom{n}{r}$.

Exemplo. As combinações dos elementos de $S = \{a, b, c\}$, dois a dois, são $\{a, b\}, \{a, c\}$ e $\{b, c\}$. Portanto $C(3, 2) = 3$. As combinações dos elementos de S três a três reduzem-se a $\{a, b, c\}$. Logo $C(3, 3) = 1$.

```
> with(combinat);
> numbcomb(3,2);
```

3

```
> choose([a,b,c], 2);
```

$$[[a, b], [a, c], [b, c]]$$

```
> choose([a,b,c], 3);
```

$$[[a, b, c]]$$

```
> choose([1,2,3,4,5], 3);
```

$$[[1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 2, 5], [1, 3, 4], [1, 3, 5], [1, 4, 5], [2, 3, 4], [2, 3, 5], [2, 4, 5], [3, 4, 5]]$$

Proposição 2. *Para quaisquer inteiros positivos n e r tais que $r \leq n$ temos*

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Prova. Seja S um conjunto com n elementos. Cada permutação dos elementos de S, r a r, pode ser obtido em 2 passos:

1. Seleccionando um subconjunto de S com r elementos;
2. Reordenando esses r elementos de modo a formar a permutação desejada.

Como $C(n, r)$ representa o número de subconjuntos de S com r elementos, podemos efectuar o passo 1 de $C(n, r)$ maneiras diferentes. Uma vez seleccionado um determinado subconjunto de r elementos, estes podem ser reordenados de $P(r, r) = r!$ maneiras diferentes. Atendendo ao Princípio da Multiplicação, concluímos que $P(n, r) = C(n, r) \times r!$, isto é,

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad \square$$

Note que $C(n, n) = 1$ e $C(n, 1) = n$. Convencionando que $C(n, 0) = 1$ para $n \geq 0$ a fórmula da Proposição 2 continua válida para $n \geq r = 0$.

A combinatória[21] e a teoria das probabilidades partilham raízes comuns e estão muito ligadas. De facto, o cálculo de uma *probabilidade discreta* (probabilidade de um acontecimento num espaço de resultados finito[22]) é um mero problema de contagem: numa experiência aleatória com um espaço $\mathcal{S}$ de resultados equiprováveis e finito, a *probabilidade* $p(A)$ de um acontecimento A é igual a $|A|/|\mathcal{S}|$, ou seja,

$$\boxed{p(A) = \frac{\text{número dos resultados } \textbf{favoráveis} \text{ a } A}{\text{número total de resultados } \textbf{possíveis}}}$$

Basta então contar o número total de resultados possíveis e, de entre esses, quais são favoráveis à realização do acontecimento.

[21] Área da matemática que trata dos problemas de contagem.

[22] Uma *experiência aleatória* é um procedimento aleatório donde resulta um de entre vários resultados possíveis. O *espaço dos resultados* é o conjunto dos resultados *possíveis* da experiência. Um *acontecimento aleatório* é um subconjunto do espaço dos resultados, formado pelos elementos que são *favoráveis* à realização desse acontecimento.

Exemplo 1. *Existem várias lotarias, como o totoloto, que dão prémios avultados a pessoas que acertam correctamente em 6 números escolhidos entre os primeiros n inteiros positivos (habitualmente, n está entre 30 e 50). Qual é a probabilidade de uma pessoa ganhar o prémio no caso $n = 40$?*

Solução. Só existe uma combinação vencedora. O número total de resultados possíveis é igual ao número de maneiras diferentes de escolher um subconjunto de 6 números entre os primeiros 40 inteiros positivos, ou seja, é igual a

$$C(40,6) = \frac{40!}{34!\,6!} = 3\,838\,380.$$

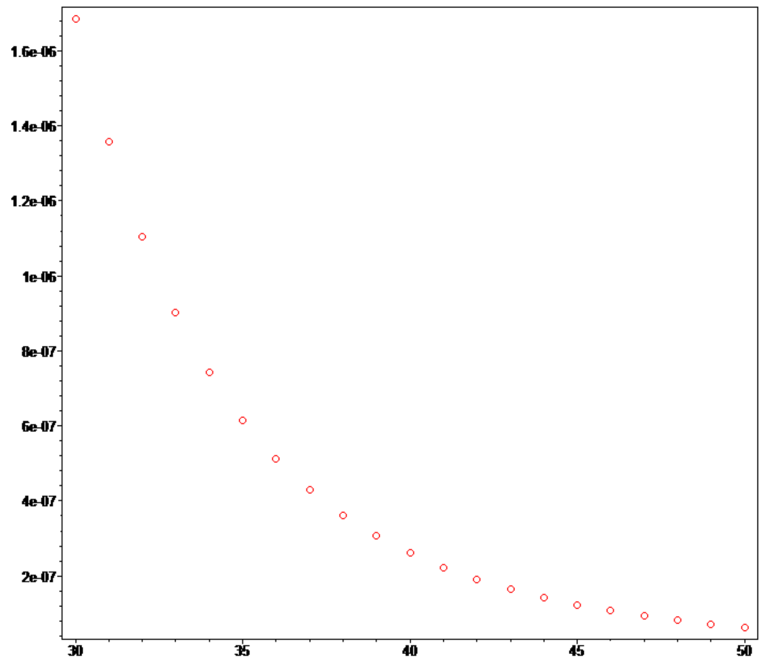
Consequentemente, a probabilidade de acertar na combinação vencedora é igual a

$$1/3\,838\,380 \sim 0.00000026.$$

Procedimento Maple para calcular essa probabilidade para todos os valores de n entre 30 e 50

```
> print(‘n, casos possiveis, probabilidade‘);
> for n from 30 to 50 do
>     n, numbcomb(n,6), evalf(1/numbcomb(n,6));
> od;
```

n	casos possíveis	probabilidade	n	casos possíveis	probabilidade
30	593775	0.168413961510^{-5}			
31	736281	0.135817710910^{-5}	41	4496388	0.222400735910^{-6}
32	906192	0.110351890110^{-5}	42	5245786	0.190629202210^{-6}
33	1107568	0.902879100910^{-6}	43	6096454	0.164029778610^{-6}
34	1344904	0.743547494810^{-6}	44	7059052	0.141662081510^{-6}
35	1623160	0.616082210010^{-6}	45	8145060	0.122773804010^{-6}
36	1947792	0.513401841710^{-6}	46	9366819	0.106759829610^{-6}
37	2324784	0.430147489010^{-6}	47	10737573	0.931309151510^{-7}
38	2760681	0.362229464410^{-6}	48	12271512	0.814895507610^{-7}
39	3262623	0.306501854510^{-6}	49	13983816	0.715112384210^{-7}
40	3838380	0.260526576310^{-6}	50	15890700	0.629298898110^{-7}



Exemplo 2. *Qual é a probabilidade que uma mão de cinco cartas no póquer contenha quatro cartas do mesmo tipo?*

Solução. Pela regra da multiplicação, o número de mãos de cinco cartas com quatro cartas do mesmo tipo é o produto do número de maneiras de escolher um tipo (de entre os 13 tipos de carta diferentes) pelo número de maneiras de escolher quatro cartas desse tipo de entre todas as cartas do baralho desse tipo (4 também) e pelo número de maneiras de escolher a quinta carta: $C(13,1) \times C(4,4) \times C(48,1)$. Como existem, no total, $C(52,5)$ mãos diferentes de cinco cartas, a probabilidade pedida é igual a

$$\frac{C(13,1) \times C(4,4) \times C(48,1)}{C(52,5)} = \frac{13 \times 1 \times 48}{2\,598\,960} \sim 0.00024.$$

Exemplo 3. *Através de um informador, a polícia sabe o local de encontro de um grupo de malfeitores. A identidade dos diferentes elementos do grupo é, no entanto, desconhecida. A tarefa do inspector Costa é prender o chefe do grupo. O inspector sabe que o chefe do grupo é o mais baixo dos cinco elementos do grupo, todos eles de diferentes alturas, que estarão presentes na reunião. Terminada a reunião, os bandidos, como medida de precaução, deixam o edifício separadamente, com um intervalo de 15 minutos. Como o inspector não sabe qual deles é o mais baixo, decide deixar sair os dois primeiros bandidos, e prender o primeiro dos seguintes que seja mais baixo do que os que até esse momento saíram. Qual é a probabilidade do inspector Costa prender a pessoa certa?*

Solução. Designemos pelas letras a, b, c, d, c os cinco bandidos de modo que as respectivas alturas satisfaçam $alt(a) < alt(b) < alt(c < alt(d) < alt(e)$. O objectivo do inspector Loureiro é, portanto, prender o bandido a. A probabilidade de ele realizar tal evento é igual ao quociente do número de permutações *favoráveis* do conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ (isto é, as permutações $x_1x_2x_3x_4x_5$ tais que o elemento de $\{x_3, x_4, x_5\}$ com menor índice que seja mais baixo do que x_1 e x_2 seja exactamente o bandido a) pelo número de permutações total (que é igual a $5! = 120$). Determinemos então o número de permutações favoráveis:

Claro que nenhuma permutação na qual a aparece na 1^a ou 2^a posições é favorável. Aquelas em que a aparece na 3^a posição são todas favoráveis e são em número de $4! = 24$. Contemos agora as permutações favoráveis nas quais a aparece na 4^a posição: as 6 nas quais b está na 1^a posição são favoráveis; analogamente as 6 nas quais b está na 2^a posição são também favoráveis; nenhuma das que b aparece na 3^a posição é favorável; das que b aparece na 5^a posição somente 4 são favoráveis (*cdcab*, *dceab*, *ccdab*, *ecdab*). Portanto ao todo temos 16 permutações favoráveis nas quais a esta na 4^a posição.
Finalmente contemos as permutações favoráveis nas quais a aparece na 5^a posição: obviamente são aquelas em que b aparece na 1^a ou 2^a posições; portanto, são $3 \times 2 + 3 \times 2 = 12$ permutações. Em conclusão, o número de permutações favoráveis é igual a $24 + 16 + 12 = 52$ e, consequentemente, a probabilidade do inspector Loureiro apanhar o chefe do bando é igual a $\frac{52}{120} \sim 0,433333$.

Os números $\binom{n}{r} = C(n, r)$ chamam-se números (ou coeficientes) binomiais (por razões que serão evidentes mais adiante) e têm muitas propriedades importantes (e fascinantes!). Em fórmulas que aparecem na análise de algoritmos, em problemas de probabilidades, etc., estes números ocorrem variadas vezes, revelando-se uma necessidade saber manipulá-los.

Da Proposição 2 conclui-se imediatamente:

Corolário 3. *Para quaisquer inteiros n e r tais que $0 \le r \le n$ tem-se* $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. □

Fórmula de Pascal. Para quaisquer inteiros n e r tais que $0 \le r \le n - 1$ tem-se

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$ □

Utilizando a Fórmula de Pascal e observando que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, podemos imediatamente calcular os números $\binom{n}{r}$ para $0 \le r \le n$, sem necessitar de utilizar a Proposição 2. Dispondo esses números do seguinte modo

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\cdots$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

obtemos o chamado *Triângulo de Pascal*.

Procedimento Maple que calcula as primeiras 9 linhas do Triângulo de Pascal

```
> for n from 1 to 9 do
>   seq(binomial(n,k),k=0..n);
> od;
```

```
1, 1
1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1
1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1
1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1
1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1
```

Muitas das relações envolvendo coeficientes binomiais podem ser descobertas através da simples observação do Triângulo de Pascal. Por exemplo:

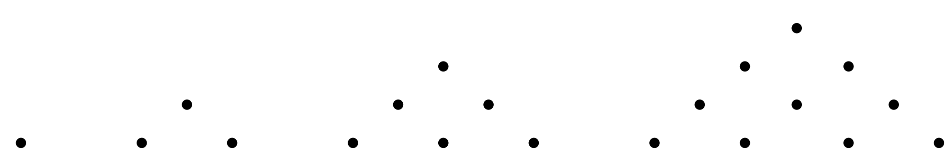
1. Se adicionarmos os elementos em cada linha n obtemos o valor 2^n, ou seja,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

   Sendo S um conjunto com n elementos, como $\binom{n}{r}$ é o número de subconjuntos de S com r elementos, então podemos concluir que o número de subconjuntos de S é igual a 2^n.

2. Facilmente se observa, pela simetria em cada linha, que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ (Corolário 3).

3. Na terceira coluna aparecem os chamados *números triangulares*, correspondentes ao número de pontos das seguintes figuras triangulares:



1 3 6 10

A validade destas identidades pode depois ser facilmente verificada utilizando o Princípio de Indução Matemática.

Teorema Binomial (ou Fórmula do Binómio de Newton[23]). Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}.$$

Prova. Não é difícil provar o Teorema Binomial por indução matemática. No entanto, a seguinte prova, puramente combinatorial, é mais curta e elegante:

Quando efectuamos a multiplicação $(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ até não restarem mais parênteses, cada um dos factores $(x+y)$ contribui com um x ou um y para cada parcela. Resultam portanto 2^n parcelas e cada uma delas pode ser escrita na forma $x^r y^{n-r}$ para algum $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Obtemos a parcela $x^r y^{n-r}$ precisamente quando escolhemos x em r dos factores e y nos restantes $n-r$. Então o número de vezes que a parcela $x^r y^{n-r}$ ocorre na expansão é igual ao número de maneiras diferentes de seleccionar r dos n factores $(x+y)$, ou seja, ao número $\binom{n}{r}$ de combinações de n elementos r a r. □

Procedimento para expansão do Binómio de Newton

```
> for n from 1 to 7 do
>    sort(expand((x+y)^n));
> od;
```

$$x+y$$
$$x^2+2xy+y$$
$$x^3+3xy+3xy+y^3$$
$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$
$$x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$$

O Teorema Binomial justifica a designação de coeficientes binomiais para os números $\binom{n}{r}$: estes números são precisamente os coeficientes da expansão do Binómio de Newton. Note que a fórmula do binómio ainda é válida para $n = 0$.

Do Binómio de Newton podemos obter, como casos particulares, algumas identidades úteis. Por exemplo:

Para $x = 1$ e $y = 1$,

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \text{ , para } n \geq 0.$$

Para $y = 1$,

$$(x+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} x^r \text{ , para } n \geq 0.$$

[23] O Teorema Binomial dá-nos uma fórmula para o desenvolvimento de $(x+y)^n$ com $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Em 1676, Newton generalizou-o, obtendo um desenvolvimento para $(x+y)^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. Para se obter esta forma é necessário estender o domínio de definição dos números binomiais $\binom{n}{r}$, permitindo que $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{Z}$. Neste caso geral o desenvolvimento torna-se uma série infinita e consequentemente algumas questões de convergência se levantam, por isso não vamos sequer enunciar esse resultado.

Para $x = -1$ e $y = 1$,

$$0 = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r}, \text{ para } n \geq 1.$$

Em resumo, temos à disposição vários métodos que podemos usar para obter identidades envolvendo os números binomiais:

1. Definição;
2. Indução matemática;
3. Triângulo de Pascal;
4. Fórmula de Pascal;
5. Argumentos combinatoriais;
6. Teorema Binomial.

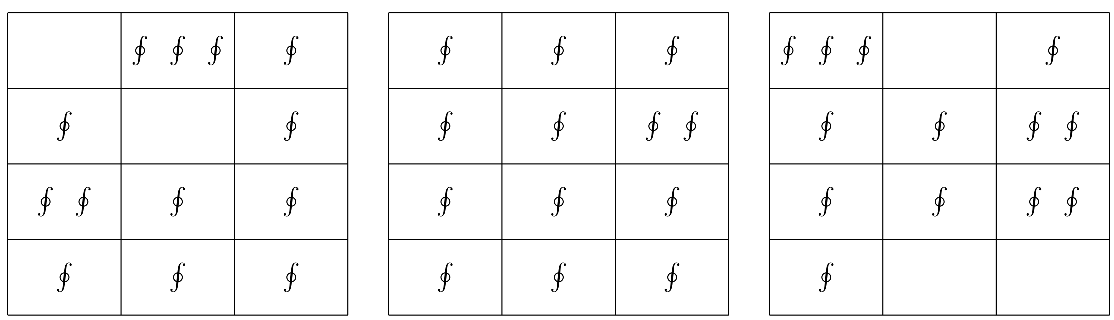
Apêndice: O Princípio dos Pombais

Há um outro princípio combinatorial básico muito intuitivo que, apesar de elementar, permite a resolução de muitos problemas (de existência de determinadas configurações), alguns surpreendentes e difíceis.

Princípio dos Pombais. Se $n+1$ objectos forem colocados em n caixas, pelo menos uma das caixas ficará com dois ou mais objectos.

Prova. Faremos a demonstração por redução ao absurdo. Suponhamos que em cada caixa ficava, no máximo, um objecto. Então o número de objectos seria no máximo n, o que contradiz a hipótese. Portanto alguma caixa conterá, pelo menos, dois objectos. $\square$

Formulado em termos de pombos este princípio diz que se n pombos voarem para $n-1$ pombais, necessariamente um pombal será ocupado por dois ou mais pombos. Por exemplo, no caso de 13 pombos e 12 pombais,



são algumas configurações possíveis.

Solução do Problema (A2).[24] Escolhendo 101 inteiros entre os inteiros $1, 2, \ldots, 200$, vamos aplicar o Princípio dos Pombais para mostrar que entre os inteiros escolhidos existem dois tais que um é divisor do outro.

Qualquer inteiro pode ser escrito na forma $2^k a$, com $k \in \mathbb{N}_0$ e a ímpar. Para qualquer inteiro entre 1 e 200, a é um dos números $1, 3, 5, \ldots, 199$. Logo, entre os 101 escolhidos, dois são da forma $2^{k_1}a_1$ e $2^{k_2}a_2$ com $a_1 = a_2$. Se $k_1 \leq k_2$ então $2^{k_1}a_1$ é divisor de $2^{k_2}a_2$. Caso $k_1 > k_2$, $2^{k_2}a_2$ é divisor de $2^{k_1}a_1$. $\square$

Vamos agora apresentar uma forma mais geral do Princípio dos Pombais.

Proposição 4. *Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ inteiros positivos. Se $p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n + 1$ objectos forem colocados em n caixas, pelo menos uma das caixas ficará com p_i ou mais objectos, para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

[24] No capítulo *Que é a Matemática Discreta?*

Prova. Suponhamos por absurdo que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a i-ésima caixa ficava com, no máximo, $p_i - 1$ elementos. Então o número total de objectos não excederia

$$(p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \cdots + (p_n - 1) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n,$$

o que é absurdo. Logo existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que a i-ésima caixa conterá pelo menos p_i objectos. □

Observações. (1) Se $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 2$ obtemos o Princípio dos Pombais.
(2) Fazendo $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = r \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que

> "*se $n(r-1)+1$ objectos forem colocados em n caixas, pelo menos uma das caixas ficará com r ou mais objectos*".

Por exemplo, no problema (A1), como o número de caixas é igual ao número de notas possíveis, ou seja, 201, podemos assegurar que se comparecerem $201(r-1)+1 = 201r - 200$ alunos ao exame, r de entre eles terão a mesma nota.

Solução do Problema (A3).[25] Provemos, utilizando a Observação (2), que de uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ de números reais é possível extrair uma subsequência crescente ou decrescente com $n+1$ elementos.

Suponhamos que não existe nenhuma subsequência crescente com $n+1$ elementos. Para $k \in \{1, 2, \ldots, n^2+1\}$ seja m_k o número de elementos da maior subsequência crescente que começa em a_k. É evidente que, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n^2+1\}$, $m_k \geq 1$ e $m_k \leq n$. Temos então n^2+1 inteiros, $m_1, m_2, \ldots, m_{n^2+1}$, entre 1 e n. Como $n(r-1)+1 = n^2+1$ para $r = n+1$, podemos concluir que $n+1$ desses inteiros são iguais entre si. Sejam eles

$$m_{k_1}, m_{k_2}, \ldots, m_{k_{n+1}},$$

onde

$$1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1} \leq n^2 + 1.$$

Se existisse algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$, seria possível construir uma subsequência crescente começando em a_{k_i} com $m_{k_{i+1}}+1$ elementos, o que é absurdo uma vez que $m_{k_i} = m_{k_{i+1}}$. Consequentemente,

$$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \cdots \geq a_{k_{n+1}},$$

isto é,

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$$

é uma subsequência decrescente com $n+1$ elementos.

Mostrámos assim que existe uma subsequência crescente ou uma subsequência decrescente com $n+1$ elementos. □

Em particular, nos primeiros 101 números naturais, dispostos por qualquer ordem, será sempre possível encontrar 11 números que formam ou uma sequência crescente ou uma sequência

[25] Difícil!

decrescente. Isto já não acontece se tomarmos apenas os primeiros 100 números naturais. Como se poderá ordenar esses números de forma a não ser possível encontrar a desejada sequência de 11 elementos? Bastará começar com 91, 92, 93 até 100, depois 81, 82, 83 até 90 e assim sucessivamente:

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10