

## Que é a Matemática Discreta?

A matemática discreta (ou, como por vezes também é apelidada, matemática finita ou matemática combinatória) é a parte da Matemática devotada ao estudo de objectos e estruturas discretas ou finitas (*discreta* significa que é formada por elementos distintos desconexos entre si). O tipo de problemas que se resolvem usando matemática discreta incluem: De quantas maneiras podemos escolher uma *password* válida para um computador? Qual é a probabilidade de ganharmos o euromilhões? Qual é o caminho mais curto entre duas cidades para um determinado sistema de transporte? Como é que podemos ordenar uma lista de inteiros de modo a que os inteiros fiquem por ordem crescente? Em quantos passos podemos fazer essa ordenação? Como podemos desenhar um circuito para adicionar dois inteiros?

Genericamente, a matemática discreta é usada quando contamos objectos, quando estudamos relações entre conjuntos finitos e quando processos (algoritmos) envolvendo um número finito de passos são analisados. Nos últimos anos tornou-se uma disciplina importantíssima da Matemática porque nos computadores a informação é armazenada e manipulada numa forma discreta.

A matemática discreta aborda fundamentalmente três tipos de problemas que surgem no estudo de conjuntos e estruturas discretas:

### I - Problemas de existência:

*Existe algum arranjo de objectos de um dado conjunto satisfazendo determinada propriedade?*

#### Exemplos:

- (A1) Se num dado exame as notas foram dadas com aproximação até às décimas e a ele compareceram 202 alunos, existirão dois alunos com a mesma nota?
- (A2) Escolham-se 101 inteiros entre os inteiros  $1, 2, 3, \dots, 200$ . Entre os inteiros escolhidos, existirão dois tais que um é divisor do outro?
- (A3) Se 101 (resp.  $n^2 + 1$ ) pessoas se encontrarem alinhadas lado a lado numa linha recta, será possível mandar dar um passo em frente a 11 (resp.  $n + 1$ ) delas de tal modo que, olhando para este grupo da esquerda para a direita, as pessoas se encontrem por ordem crescente ou decrescente das suas alturas?

Ou seja, de uma sequência

$$a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$$

de números reais, será possível extrair uma subsequência crescente ou decrescente com  $n + 1$  elementos?

Por exemplo, a sequência  $3, 2, 12, 8, 10, 1, 4, 11, 9, 7$  contém 10 termos. Note-se que  $10 = 3^2 + 1$ . Existem 2 subsequências crescentes de comprimento 4, nomeadamente  $3, 8, 10, 11$  e  $2, 8, 10, 11$ . Existe também uma subsequência decrescente de comprimento 4 que é  $12, 10, 9, 7$ . Por outro lado, a sequência  $3, 2, 12, 8, 10, 1, 4, 11, 7, 9$  já não contém nenhuma subsequência decrescente de comprimento 4. Em contrapartida, tem 5 subsequências crescentes de comprimento 4:  $3, 8, 10, 11$ ;  $3, 4, 7, 9$ ;  $2, 8, 10, 11$ ;  $2, 4, 7, 9$  e  $1, 4, 7, 9$ .

- (A4) O Rio Pregel atravessa a cidade de Königsberg, na Prússia Oriental (actualmente Kaliningrado, na Rússia), dividindo-a em quatro regiões, como se pode ver na seguinte gravura<sup>1</sup> da cidade:



Conta-se que os habitantes de Königsberg se entretinham a tentar encontrar uma maneira de efectuar um passeio pela cidade, de modo a voltar ao ponto de partida, passando uma única vez por cada uma das 7 pontes. Como as suas tentativas saíram sempre goradas, muitos acreditavam ser impossível realizar tal trajecto. Contudo, só em 1736, com um artigo de L. Euler<sup>2</sup>, o problema foi totalmente abordado de modo matemático, e tal impossibilidade foi provada. Vale a pena lermos os primeiros parágrafos desse artigo de Euler:

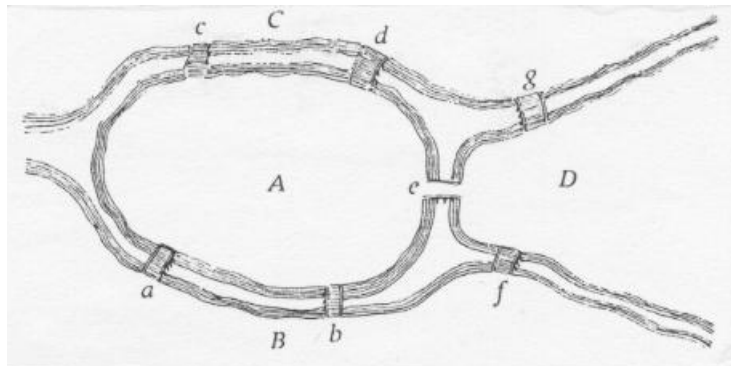
*“1. Além do ramo da geometria que se preocupa com grandezas, e que sempre recebeu a maior atenção, existe outro ramo, quase desconhecido anteriormente, que Leibniz pela primeira vez mencionou, chamando-lhe ‘geometria da posição’. Este ramo preocupa-se com a determinação de posições e suas propriedades; não envolve medidas, nem cálculos feitos com elas. Ainda não se determinou de modo satisfatório que tipo de problemas são relevantes para esta geometria*

<sup>1</sup>[M. Zeiller, *Topographia Prussiae et Pomerelliae*, Frankfurt, c. 1650], cópia em [1].

<sup>2</sup>No artigo [*Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8 (1736) 128-140], baseado numa comunicação apresentada à Academia em 26 de Agosto de 1735, e considerado por muitos o nascimento da Teoria dos Grafos. Euler foi um dos maiores génios da matemática; este ano comemoram-se os 300 anos do seu nascimento.

de posição, ou que métodos deverão ser utilizados para os resolver. Portanto, quando um problema foi recentemente mencionado, que parecia geométrico mas era tal que não requeria medir distâncias, nem realizar cálculos, não tive dúvida que tinha a ver com a geometria de posição — fundamentalmente porque a sua solução envolvia somente posição, e nenhuns cálculos eram úteis. Decidi então apresentar aqui o método que encontrei para resolver este tipo de problema, como um exemplo da geometria de posição.

2. O problema, que me foi dito ser muito popular, é o seguinte: em Königsberg na Prússia, existe uma ilha A, chamada 'Kneiphof'; o rio que a rodeia divide-se em dois braços, como pode ser visto na figura, e estes braços são atravessados por sete pontes a, b, c, d, e, f e g.



Pergunta-se se alguém consegue encontrar um trajecto de tal modo que atravesse cada ponte uma e uma só vez. Foi-me dito que algumas pessoas afirmaram tal ser impossível, enquanto outras tinham dúvidas; mas ninguém assegurou que tal trajecto existe. A partir disto, formulei o problema geral: qualquer que seja o arranjo e a divisão do rio em braços, e qualquer que seja o número de pontes, pode-se concluir se é possível ou não atravessar cada ponte exactamente uma vez?

3. Quanto ao problema das 7 pontes de Königsberg, este pode ser resolvido fazendo uma lista exaustiva de todos os trajectos possíveis, e verificando se cada trajecto satisfaz ou não as condições do problema. Por causa do número de possibilidades, este método de resolução seria muito complicado e laborioso, e noutros problemas com mais pontes totalmente impraticável. Além disso, se seguirmos este método até à sua conclusão, muitos trajectos irrelevantes serão encontrados, que é a razão da dificuldade deste método. Portanto rejeitei-o, e procurei outro, preocupado somente com o problema da existência do trajecto requerido; achei que um tal método seria mais simples.”<sup>3</sup>

<sup>3</sup>O resto do artigo pode ser lido em [1]. O ponto de vista que Euler tomou, de não confinar a sua atenção ao caso particular do problema de Königsberg mas olhar para o problema geral, é típico de um matemático. Contudo Euler continuou com o caso particular em mente, voltando a ele mais do que uma vez, para interpretar e verificar as suas novas descobertas. Isto é muito interessante, ilustrando como a generalização e a especialização se complementam na investigação matemática. Outro aspecto muito interessante ocorre na Secção 4, quando

- (A5) Imagine uma prisão com 64 celas, dispostas como os quadrados de um tabuleiro de xadrez (com 8 linhas e 8 colunas). Imagine ainda que entre cada duas celas vizinhas existe uma porta. É proposta, ao prisioneiro colocado na cela de um dos cantos, a sua liberdade caso consiga chegar à cela do canto diagonalmente oposto, depois de passar por todas as outras celas uma única vez. Conseguirá o prisioneiro obter a sua liberdade?
- (A6) Consideremos um tabuleiro de xadrez e algumas peças (idênticas) de dominó tais que cada uma cobre precisamente 2 quadrados adjacentes do tabuleiro. Será possível dispor 32 dessas peças no tabuleiro de modo a cobri-lo, sem sobreposição de peças?<sup>4</sup>
- E se o tabuleiro tiver  $mn$  quadrados em  $m$  linhas e  $n$  colunas?

## II - Problemas de contagem (e enumeração):

*Quantos arranjos (configurações) desse tipo existem?*

Por vezes será importante ainda enumerá-los e/ou classificá-los.

### Exemplos:

- (B1) O problema (A6) de existência de uma cobertura perfeita de um tabuleiro de xadrez é muito simples; rapidamente se constroem diversas coberturas perfeitas. É no entanto muito mais difícil proceder à sua contagem. Tal foi feito pela primeira vez em 1961 por M. E. Fisher<sup>5</sup>: são

$$12988816 = 2^4 \times (901)^2.$$

Para outros valores de  $m$  e  $n$  já poderá não existir nenhuma cobertura perfeita. Por exemplo, não existe nenhuma no caso  $m = n = 3$ . Para que valores de  $m$  e  $n$  existem? Não é difícil concluir que um tabuleiro  $m \times n$  possui uma cobertura perfeita se e só se pelo menos um dos números  $m$  ou  $n$  é par, ou equivalentemente, se e só se o número  $mn$  de quadrados do tabuleiro é par. Fischer determinou fórmulas gerais (envolvendo funções trigonométricas) para o cálculo do número exacto de coberturas perfeitas de um tabuleiro  $m \times n$ .

Este problema é equivalente a um problema famoso em Física Molecular, conhecido como o *Problema das moléculas diatómicas*<sup>6</sup>.

- (B2) Sejam  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_t\} \subseteq \mathbb{N}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Quantos inteiros positivos, inferiores ou iguais a  $n$ , não são divisíveis por nenhum dos elementos de  $A$ ? Quantos inteiros positivos inferiores a  $n$  são primos com  $n$ ? Quantos números primos compreendidos entre 2 e  $n \geq 2$  existem?
- (B3) Um empregado de um restaurante, encarregue de guardar os  $n$  chapéus dos  $n$  clientes esqueceu-se de os identificar. Quando os clientes os pediram de volta, o empregado foi-os

---

Euler introduz a notação conveniente (“o modo particularmente conveniente no qual o atravessamento de uma ponte pode ser representado”) e com ela obtem nas secções subsequentes um dispositivo muito útil para resolver o problema, que mostra como o cuidado na escolha da boa notação pode ser muitas vezes a chave do problema.

<sup>4</sup>Tal arranjo diz-se uma *cobertura perfeita* do tabuleiro por dominós.

<sup>5</sup>*Statistical Mechanics of Dimers on a Plane Lattice*, Physical Review 124 (1961) 1664-1672.

<sup>6</sup>Cf. [M. E. Fisher, *Statistical Mechanics of Dimers on a Plane Lattice*, Physical Review 124 (1961) 1664-1672].

devolvendo de forma aleatória! Qual é a probabilidade de nenhum cliente receber o seu chapéu de volta?

O caso  $n = 52$  deste problema é equivalente ao célebre *Problème des rencontres* proposto por Montmort em 1708:

*No chamado “jogo dos pares”, as 52 cartas de um baralho são dispostas em linha, com o seu valor à vista. As cartas de um segundo baralho são dispostas também em linha por cima das outras. A pontuação é determinada contando o número de vezes em que a carta do segundo baralho coincide com a do primeiro sobre a qual foi colocada. Qual é a probabilidade de se obterem zero pontos?*

(B4) O seguinte problema foi originalmente proposto por Leonardo de Pisa<sup>7</sup>, mais conhecido por Fibonacci, no séc. XIII:

Suponhamos que, para estudar a reprodução profícua dos coelhos, colocámos um par de coelhos (sendo um de cada sexo) numa ilha. Passados dois meses, a fêmea deu à luz todos os meses um novo par de coelhos, de sexos opostos. Por sua vez, a partir dos dois meses de idade, cada novo par deu à luz um outro par, todos os meses. Quantos pares de coelhos existiam na ilha ao cabo de  $n$  meses, supondo que nenhum coelho morreu entretanto?

A população de coelhos pode ser descrita por uma *relação de recorrência*. No final do primeiro mês o número de pares de coelhos era 1. Como este par não reproduziu durante o segundo mês, no final deste o número de pares de coelhos continuou a ser 1. Durante o terceiro mês nasceu um novo par pelo que no final deste mês existiam 2 pares de coelhos. Durante o quarto mês só o par inicial deu origem a um novo par, logo no final do quarto mês existiam 3 pares de coelhos.

MÊS	Pares reprodutores	Pares jovens	Total de pares
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

Denotemos por  $f_n$  o número de pares de coelhos existentes no final do mês  $n$ . Este número é claramente igual à soma do número de pares de coelhos existentes no final do mês anterior, ou seja  $f_{n-1}$ , com o número de pares de coelhos entretanto nascidos durante o mês  $n$ , que é igual a  $f_{n-2}$ . Portanto a sequência  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaz a relação

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

para  $n \geq 3$ , sendo  $f_1 = f_2 = 1$ .

<sup>7</sup>No seu livro *Liber Abacci* (literalmente, um livro sobre o ábaco), publicado em 1202.

Esta sucessão é a famosa *sucessão de Fibonacci*, e os seus termos são chamados *números de Fibonacci*<sup>8</sup>.

Claro que para responder totalmente ao problema de Fibonacci teremos de encontrar um método para determinar uma fórmula explícita para o número  $f_n$  a partir daquela relação de recorrência.

### III - Problemas de optimização:

*De todas as possíveis configurações, qual é a melhor de acordo com determinado critério?*

#### Exemplos:

(C1) A velocidade com que um gás flui através de uma tubagem depende do diâmetro do tubo, do seu comprimento, das pressões nos pontos terminais, da temperatura e de várias propriedades do gás. O desenho de uma rede de distribuição de gás envolve, entre outras decisões, a escolha dos diâmetros dos tubos, de modo a minimizar o custo total da construção e operação do sistema. A abordagem *standard* consiste em recorrer ao “bom senso” (método habitual da engenharia!) para a escolha de tamanhos razoáveis de tubagem e esperar que tudo corra pelo melhor. Qualquer esperança de fazer melhor parece, à primeira vista, não existir. Por exemplo, uma pequena rede com 40 ligações e 7 diâmetros possíveis de tubo, daria origem a  $7^{40}$  redes diferentes. O nosso problema é o de escolher a rede mais barata de entre essas  $7^{40}$  possibilidades (que é um número astronómico!). Trata-se assim de um problema de optimização, no qual procuramos o desenho (padrão ou arranjo) óptimo para um determinado desempenho.

Este problema, mesmo com o uso dos actuais computadores de grande velocidade, não parece tratável por exaustiva análise de todos os casos. Mesmo qualquer desenvolvimento esperado na velocidade daqueles não parece ter influência significativa nesta questão. Contudo, um procedimento simples implementado no Golfo do México<sup>9</sup>, deu origem a um método que permite encontrar a rede óptima em  $7 \times 40 = 280$  passos em vez dos tais  $7^{40}$ , permitindo poupar alguns milhões de dólares. É um exemplo paradigmático das virtualidades da chamada Optimização Combinatória.

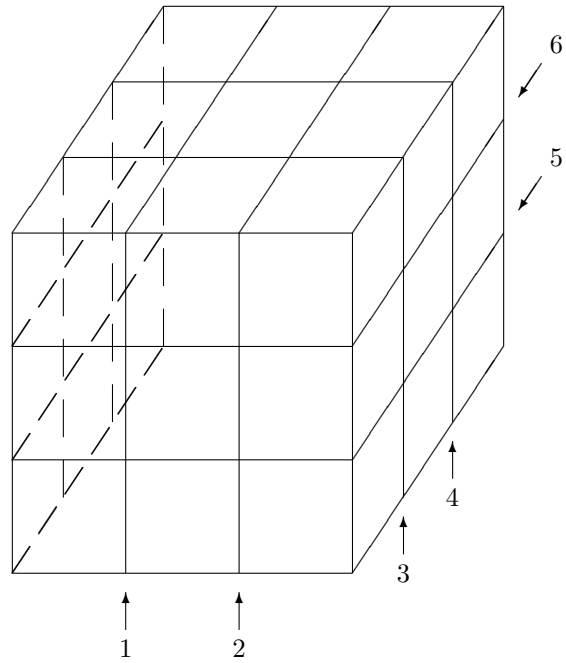
(C2) Suponha que se fazem  $n$  cortes numa *pizza*. Qual o número máximo de partes em que a *pizza* poderá ficar dividida?

(C3) Consideremos um cubo de madeira com 3 cm de lado. Se desejarmos cortar o cubo em 27 cubos de 1 cm de lado, qual é o número mínimo de cortes em que tal pode ser realizado?

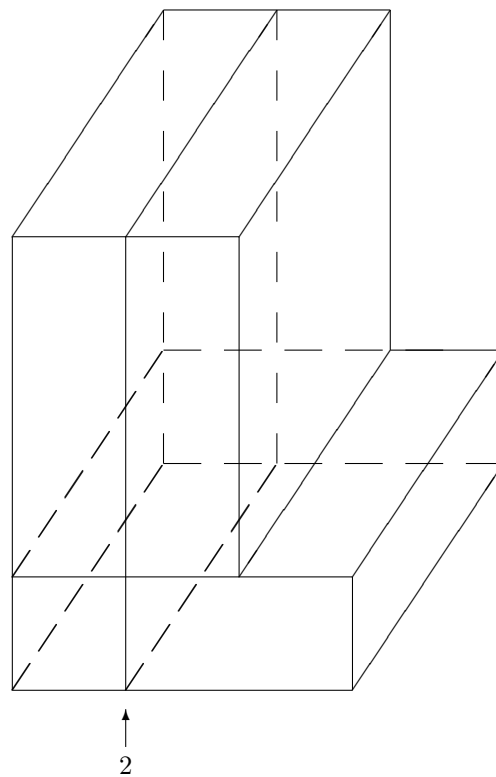
Uma maneira de cortar o cubo é fazendo 6 cortes, 2 em cada direcção (enquanto se mantém o cubo num só bloco):

<sup>8</sup>Estes números aparecem em variadíssimos problemas. Prova da sua importância é a existência da revista *Fibonacci Quarterly*, revista da *Fibonacci Association*.

<sup>9</sup>Cf. [H. Frank e I. T. Frisch, *Network Analysis*, Sci. Amer. 223 (1970) 94-103], [D. J. Kleitman, *Comments on the First Two Days' Sessions and a Brief Description of a Gas Pipeline Network Construction Problem*, em F. S. Roberts (ed.), *Energy: Mathematics and Models*, SIAM, Filadélfia, 1976, p. 239-252], [Rothfarb *et al.*, *Optimal Design of Offshore Natural-Gas Pipeline Systems*, Oper. Res. 18 (1970) 992-1020] e [N. Zadeh, *Construction of Efficient Tree Networks: The Pipeline Problem*, Networks 3 (1973) 1-32].



Mas será possível realizar tal operação com menos cortes, se as peças puderem ser deslocadas entre cortes? Por exemplo, em



o segundo corte corta agora mais madeira do que cortaria se não tivessemos rearranjado as peças depois do primeiro corte. Parece, pois, um problema difícil de analisar. Olhemos no entanto para ele de outro modo. As 6 faces do cubo do meio só se conseguem obter com cortes (independentes). Portanto, são sempre necessários 6 cortes e fazer rearranjos das peças entre os cortes não ajuda nada.

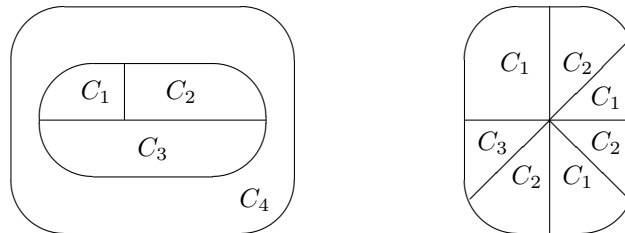
Agora outro problema (este de contagem) surge naturalmente: de quantas maneiras diferentes pode o cubo ser cortado, realizando somente 6 cortes?

- (C4) Em 1852, Francis Guthrie reparou que no mapa de Inglaterra os condados poderiam ser coloridos, usando somente quatro cores, de modo a que condados vizinhos tivessem cores diferentes. Através do seu irmão perguntou a De Morgan se quatro cores chegariam para colorir, naquelas condições, qualquer mapa. Em 1878, num encontro da Sociedade Matemática de Londres, A. Cayley perguntou se alguém conseguia resolver o problema. Assim teve origem o famoso *Problema das 4 cores*. Somente em 1976, K. Appel e W. Hagen da Universidade do Illinois (E.U.A.), o conseguiriam resolver, com uma demonstração polémica<sup>10</sup>, com a ajuda imprescindível do computador, que executou rotinas durante mais de 1000 horas consecutivas!

A demonstração deste resultado está muito longe de ser apresentável, pelo que nos limitamos a enunciar a solução<sup>11</sup>:

Em qualquer mapa sobre um plano ou uma esfera (representando um qualquer conjunto de regiões tais que, para quaisquer dois pontos numa mesma região, existe sempre um caminho, totalmente contido nessa região, ligando esses dois pontos), o menor número de cores necessárias para o colorir, de tal modo que duas regiões *adjacentes* (ou seja, com um número infinito de pontos fronteiros comuns) não tenham a mesma cor, é 4.

Por exemplo:



As origens da Matemática Combinatória datam do séc. XVII em estreita ligação com os jogos de azar e o cálculo das probabilidades; Pascal, Fermat, Jacob Bernoulli e Leibniz realizaram investigações de problemas combinatoriais relacionados com jogos de azar, constituindo estas as bases sobre as quais se desenvolveu o cálculo das probabilidades.

<sup>10</sup>Para uma história mais completa das origens e resolução deste problema consulte [R. Fritsch e G. Fritsch, *The Four-Color Theorem*, Springer, 1998].

<sup>11</sup>K. Appel e W. Hagen, *Every planar map is four colorable*, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976) 711-712.

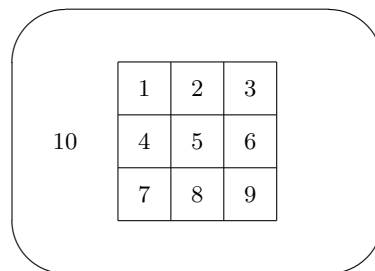


No séc. XVIII Euler fundou a Teoria dos Grafos com a resolução do famoso *problema das pontes de Königsberg*, como já referimos, e James Bernoulli publicou o primeiro livro<sup>12</sup> contendo métodos combinatoriais.

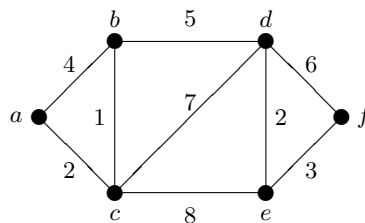
Com o desenvolvimento dos computadores, a Matemática Combinatória tornou-se uma disciplina autónoma dentro da matemática moderna, das que mais se tem desenvolvido, tendo inúmeras aplicações a diversas áreas da matemática.

## Exercícios

1. Mostre que um tabuleiro com  $m \times n$  quadrados possui uma cobertura perfeita se e só se pelo menos um dos valores  $m$  ou  $n$  é par.
2. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $f(n)$  o número de coberturas perfeitas de um tabuleiro  $2 \times n$ . Calcule  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$  e  $f(5)$ . Tente encontrar uma relação que seja satisfeita pela função  $f$  e que lhe permita calcular  $f(12)$ .
3. Determine o número de coberturas perfeitas distintas de um tabuleiro  $3 \times 4$ .
4. Seja  $n$  um inteiro positivo. Dizemos que uma  $n$ -coloração de um mapa é uma coloração de todas as regiões do mapa, usando  $n$  cores, de tal modo que regiões adjacentes (isto é, regiões com um número infinito de pontos fronteiros comuns) têm cores diferentes. Prove que:
  - (a) Um mapa formado no plano por um número finito de círculos possui uma 2-coloração.
  - (b) Um mapa formado no plano por um número finito de linhas rectas também possui uma 2-coloração.
5. Mostre que o seguinte mapa de 10 países admite uma 3-coloração. Fixadas essas 3 cores, determine o número de colorações distintas possíveis.



6. Determine o caminho mais curto de  $a$  para  $f$  no mapa de estradas da figura



(Os valores junto de cada estrada representam os comprimentos destas, medidos numa determinada unidade.)

<sup>12</sup>*Ars Conjectandi*.

## Referências

- [1] N. L. Biggs, E. K. Lloyd e R. J. Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, 1986.  
(05-01/BIG)