

## Lógica elementar

### Boole e Tarski World

1. Abra o **Boole** e construa a tabela de verdade da proposição

$$\neg(p \wedge (\neg p \vee (q \wedge r))) \vee q.$$

Para isso, escreva a fórmula no topo direito da tabela (usando a barra de ferramentas). Se a fórmula estiver bem formada, o “(1)” acima dela passa a verde (note que **as variáveis proposicionais têm que ser escritas obrigatoriamente em maiúsculas:  $A, B, C, \dots, P, Q, R, \dots$** ). Em seguida, insira à esquerda, as colunas das diversas variáveis proposicionais (colunas de referência) com a ajuda das instruções **Add Column Before** ou **Add Column After** e preencha-as com os diversos valores lógicos de verdade (pode fazer isso automaticamente com a tecla **Fill Ref Cols**). Depois preencha os valores de verdade **T** e **F** nas outras colunas por baixo da fórmula, de acordo com as respectivas operações lógicas. Quando a tabela estiver completa, clique no botão **Verify Table** para verificar se todos os valores estão correctos.

Depois de ter uma tabela completa e correcta, clique no botão **Assessment** por baixo da barra de ferramentas. Aqui deverá responder a um questionário sobre se a proposição é uma tautologia. Verifique se a sua resposta está correcta em **Verify Assess**.

2. Use o **Boole** para construir as tabelas de verdade das seguintes proposições e indique se são tautologias.
  - (a)  $\neg(P \wedge \neg Q \wedge \neg P)$ .
  - (b)  $P \vee \neg(Q \vee \neg(R \wedge P))$ .
  - (c)  $\neg(\neg A \vee \neg(B \wedge C) \vee (A \wedge B))$ .
  - (d)  $\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg(C \wedge D))$ .
3. Com a ajuda do **Boole** determine as tabelas de verdade do Exercício 9 (TP).
4. Revisite os problemas 11 e 14 da Folha 1-TP, agora com a ajuda do **Boole**.
5. Confirme com o **Boole** as suas respostas ao Exercício 20 (TP).
6. Um mundo de Tarski (tridimensional) consiste num tabuleiro de xadrez ( $8 \times 8$ ) juntamente com figuras geométricas diversas: tetraedros, cubos, e octaedros, dispostas nas casas do tabuleiro. Relativamente a estas figuras consideram-se os seguintes predicados unários, binários e ternários, que descrevem o tamanho, o tamanho relativo e posição relativa:

#### Predicados unários

Sentença atómica	Interpretação
$Tet(a)$	$a$ é um tetraedro
$Cube(a)$	$a$ é um cubo
$Dodec(a)$	$a$ é um dodecaedro
$Small(a)$	$a$ é pequeno
$Medium(a)$	$a$ é médio
$Large(a)$	$a$ é grande

### Predicados binários

Sentença atómica	Interpretação
$SameSize(a, b)$	$a$ tem o mesmo tamanho que $b$
$SameShape(a, b)$	$a$ tem a mesma forma que $b$
$Larger(a, b)$	$a$ é maior que $b$
$Smaller(a, b)$	$a$ é menor que $b$
$SameCol(a, b)$	$a$ está na mesma coluna que $b$
$SameRow(a, b)$	$a$ está na mesma linha que $b$
$Adjoins(a, b)$	$a$ e $b$ estão localizados em casas adjacentes (mas não na diagonal)
$LeftOf(a, b)$	$a$ está numa coluna à esquerda de $b$
$RightOf(a, b)$	$a$ está numa coluna à direita de $b$
$FrontOf(a, b)$	$a$ está numa linha à frente de $b$
$BackOf(a, b)$	$a$ está numa linha atrás de $b$

### Predicados ternários

Sentença atómica	Interpretação
$Between(a, b, c)$	$a, b$ e $c$ estão na mesma coluna, linha ou diagonal, e $a$ está entre $b$ e $c$ .

- (a) Para se familiarizar com o **Tarski World** abra-o e carregue os ficheiros **Wittgenstein's World** e **Wittgenstein's Sentences** (na pasta **TW Exercises**). Nestes ficheiros verá um mundo de blocos geométricos e uma lista de sentenças atómicas (algumas delas têm comentários). Percorra essa lista e tente calcular mentalmente o correspondente valor lógico nesse mundo. Use o botão **Verify** para verificar se a sua resposta está correcta ou não. Se ficar surpreendido por alguma resposta, tente ver porque errou, comparando a sua interpretação do predicado com a definição exacta do predicado.

- (b) Em seguida, mude o mundo de Wittgenstein de diversas maneiras, alterando os objectos e as suas posições, observando o que acontece ao valor lógico das diversas sentenças.

[Objectivo: ajudá-lo a memorizar a interpretação de cada um dos predicados do **Tarski World**; só deverá avançar depois de dominar bem a lista de predicados e as suas interpretações.]

7. Construa um mundo no qual as seguintes sentenças sejam simultaneamente verdadeiras:

$Tet(a)$ ,  $Medium(a)$ ,  $Dodec(b)$ ,  $Cube(c)$ ,  $FrontOf(a, b)$ ,  $Between(a, b, c)$ ,  $a = d$ ,  $Larger(a, b)$ ,  $Smaller(a, c)$ ,  $LeftOf(b, c)$ .

8. Abra os ficheiros **Lestrade's Sentences** e **Lestrade's World**. Reparará que nenhum dos objectos neste mundo tem nome. Atribua nomes aos objectos de modo que todas as sentenças na lista se tornem verdadeiras.
9. Observe a diferença entre os predicados  $Larger$  e  $BackOf$ : um determinado cubo  $a$  ser maior ou não que outro cubo  $b$  é um facto óbvio, de resposta precisa, independente da perspectiva com que olhemos para o mundo; mas saber se  $a$  está atrás de  $b$  já depende da perspectiva: se rodarmos o mundo  $90^\circ$ , a resposta poderá mudar.

Abra os ficheiros **Austin's Sentences** e **Wittgenstein's World**.

- (a) Determine o valor lógico das sentenças neste mundo e confira que são os seguintes:

	Original	Rodado 90°	Rodado 180°	Rodado 270°
1.	F			
2.	F			
3.	V			
4.	F			
5.	V			
6.	F			

- (b) Rode o mundo 90° e torne a avaliar as sentenças, juntando os resultados à tabela. Repita o processo até dar uma volta completa.
- (c) Junte uma sétima sentença à lista com o seguinte padrão: V F V F .
- (d) Existem sentenças atômicas nesta linguagem que produzam uma linha com o padrão F V F F ?
- (e) Existem sentenças atômicas nesta linguagem que produzam uma linha com exactamente três V ?
10. Para simplificar, representaremos um mundo de Tarski na folha de papel (bidimensional) num tabuleiro de xadrez (8 × 8) com quadrados (representarão os cubos), triângulos (representarão os tetraedros), e estrelas (representarão os dodecaedros), dispostos nas casas do tabuleiro<sup>1</sup>. Por exemplo:

#### O mundo de Wittgenstein

	□ <i>d</i>			★ <i>e</i>			▽ <i>f</i>
▽			□ <i>c</i>			★	
	▽ <i>a</i>			□ <i>b</i>			★

- (a) Quais das sentenças seguintes são verdadeiras no mundo de Wittgenstein?
1.  $Triângulo(f) \wedge Pequeno(f)$ .
  2.  $Triângulo(f) \wedge Grande(f)$ .
  3.  $Triângulo(f) \wedge \neg Pequeno(f)$ .
  4.  $Triângulo(f) \wedge \neg Grande(f)$ .
  5.  $\neg Triângulo(f) \wedge \neg Pequeno(f)$ .

<sup>1</sup>Identificaremos também os predicados pelo seu nome em português; para  $Between(a, b, c)$  usaremos  $B(a, b, c)$ .

6.  $\neg\text{Triângulo}(f) \wedge \neg\text{Grande}(f)$ .
7.  $\neg(\text{Triângulo}(f) \wedge \text{Pequeno}(f))$ .
8.  $\neg(\text{Triângulo}(f) \wedge \text{Grande}(f))$ .
9.  $\neg(\neg\text{Triângulo}(f) \wedge \neg\text{Pequeno}(f))$ .
10.  $\neg(\neg\text{Triângulo}(f) \wedge \neg\text{Grande}(f))$ .
11.  $\text{Esquerda}(a, c) \vee \text{Esquerda}(c, b) \vee \neg B(c, a, b)$ .
12.  $\neg\neg(\text{Acima}(e, b) \wedge \neg\text{Abaixo}(c, b))$ .
13.  $\text{Acima}(d, a) \wedge \text{Esquerda}(d, e) \wedge \text{Abaixo}(b, e) \wedge B(c, d, b)$ .
14.  $\text{MaisPequeno}(c, e) \vee \neg(\text{Quadrado}(a) \vee \text{Quadrado}(d))$ .
15.  $\neg(\neg\text{Estrela}(e) \vee \neg\neg\text{Triângulo}(f))$ .

(b) Qual é o número máximo de sentenças que pode tornar verdadeiras num só mundo mudando o tamanho ou a forma de  $f$  (ou ambos)?

11. Construa um mundo em que todas as sentenças seguintes são verdadeiras:

1.  $\text{Dodecaedro}(a) \wedge \text{Cubo}(b)$ .
2.  $\text{Abaixo}(b, a) \wedge \text{Esquerda}(d, b) \wedge \text{Acima}(f, d) \wedge \text{Direita}(a, f)$ .
3.  $\text{Tetraedro}(c) \wedge \text{Tetraedro}(e) \wedge \text{Esquerda}(c, d)$ .
4.  $\neg\text{Esquerda}(c, e) \wedge \neg\text{Esquerda}(e, c)$ .
5.  $B(d, b, c) \wedge \neg B(d, c, a)$ .
6.  $\neg\text{Cubo}(b) \vee (\text{Cubo}(d) \wedge \text{Acima}(d, b))$ .
7.  $(\text{Pequeno}(c) \wedge \text{Abaixo}(c, b)) \vee \text{Cubo}(d)$ .
8.  $\text{Maior}(f, a) \wedge \text{Maior}(a, b)$ .
9.  $\neg(\text{MaisPequeno}(c, a) \vee \text{MaisPequeno}(a, c))$ .
10.  $\text{Maior}(d, b) \wedge \text{Maior}(f, d) \wedge \neg(\text{Maior}(e, d) \vee \text{Maior}(d, e))$ .

12. Considere as premissas seguintes:

1.  $\text{Tetraedro}(b)$ .
2.  $\text{Cubo}(c)$ .
3.  $\text{Maior}(c, b) \vee b = c$ .

(a) Determine se cada uma das sentenças seguintes é consequência tautológica das premissas dadas, justificando cuidadosamente as suas respostas:

1.  $\text{MaisPequeno}(b, c)$ .
2.  $\text{Maior}(c, b) \vee (\text{Tetraedro}(b) \wedge b = c)$ .
3.  $\neg(\text{Maior}(c, b) \wedge \neg\text{Maior}(c, b))$ .

(b) Considerando a interpretação usual, no mundo de Tarski, dos predicados considerados, determine se a sentença

$$(\text{Tetraedro}(b) \wedge \text{Pequeno}(b)) \vee (\text{Cubo}(c) \wedge \text{Médio}(c))$$

é consequência lógica das premissas consideradas. Em caso afirmativo, justifique cuidadosamente a sua resposta. Se não for, construa um mundo — recorrendo ao software Tarski World — no qual as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa. Grave o ficheiro.

13. Diga em que casos as “conclusões” são conseqüências lógicas das premissas. Para cada caso em que isso não aconteça, construa um mundo (isto é, um *contra-exemplo*) no qual as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa.
- Premissa:  $Esquerda(a, b)$ . Conclusão:  $Direita(b, a)$ .
  - Premissas:  $Esquerda(a, b)$ ,  $b = c$ . Conclusão:  $Direita(c, a)$ .
  - Premissas:  $Esquerda(a, b)$ ,  $Direita(c, a)$ . Conclusão:  $Esquerda(b, c)$ .
  - Premissas:  $Trás(a, b)$ ,  $Frente(a, c)$ . Conclusão:  $Frente(b, c)$ .
  - Premissas:  $B(b, a, c)$ ,  $Esquerda(a, c)$ . Conclusão:  $Esquerda(a, b)$ . (Recorde que  $B(b, a, c)$  significa que  $b$  está entre  $a$  e  $c$ , na mesma fila.)
14. (a) Descreva cada uma das propriedades seguintes do mundo de Boole, com sentenças da linguagem de primeira ordem do Tarski (use os predicados referidos em exercícios anteriores):
- $f$  não está abaixo de  $a$ .
  - $f$  está à direita de  $a$  e à esquerda de  $b$ .
  - $f$  está acima ou é mais pequeno do que  $a$ .
  - $e$  e  $d$  estão ambos entre  $c$  e  $a$ .
  - Nem  $e$  nem  $d$  são maiores que  $c$ .
  - $c$  nem é maior nem é mais pequeno do que  $e$ .
  - $c$  é mais pequeno do que  $a$ , mas maior do que  $e$ .
  - $c$  está abaixo de  $a$ ; além disso, é mais pequeno do que  $f$ .

#### O mundo de Boole

						★ $f$	
					▽ $a$		▽ $b$
			★ $d$				
		★ $e$					
	▽ $c$						

- (b) Neste mundo apenas uma das frases seguintes é verdadeira. Qual? Traduza essa frase para a linguagem da lógica de primeira ordem.
- $a$  é pequeno ou  $c$  e  $d$  são ambos grandes.
  - $d$  e  $e$  estão ambos acima de  $b$ .
  - $d$  e  $e$  estão ambos acima de  $b$  e não são maiores do que ele.
  - $d$  e  $c$  são quadrados; além disso, nenhum deles é médio.
  - Nem  $e$  nem  $a$  estão à direita de  $c$  nem à esquerda de  $b$ .

6.  $e$  não é grande ou está acima de  $a$ .
7.  $c$  nem está entre  $a$  e  $b$  nem está abaixo deles.
8.  $a$  e  $e$  são ambos triângulos, ou  $a$  e  $f$  são-no ambos.
9.  $c$  está entre  $d$  e  $f$  ou é mais pequeno do que os dois.

15. Dê uma demonstração informal de  $Feliz(João)$  a partir das seguintes três premissas:

1.  $\neg(Casa(Carlos) \wedge Casa(Joana))$ .
2.  $Casa(Carlos) \vee Feliz(João)$ .
3.  $Casa(Joana) \vee Feliz(João)$ .

16. Segue-se a tabela de verdade que define um conectivo ternário  $\diamond$ . Defina este conectivo em termos de conjunções, disjunções e negações.

$p$	$q$	$r$	$\diamond(p, q, r)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

17. Supondo  $p, q, r$  sentenças atómicas, mostre que a sentença “If  $p$  then  $q$  else  $r$ ” se pode exprimir por meio de

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r).$$

18. Determine o valor lógico das sentenças seguintes no mundo de Wittgenstein (Exercício 10).

1.  $(Triângulo(a) \wedge Quadrado(c)) \rightarrow Estrela(d)$ .
2.  $Quadrado(c) \rightarrow (Grande(c) \rightarrow (Quadrado(c) \wedge Grande(c)))$ .
3.  $\neg(Triângulo(a) \rightarrow Grande(a)) \rightarrow (Triângulo(a) \wedge \neg Grande(a))$ .
4.  $\neg(Grande(a) \leftrightarrow Pequeno(b))$ .
5.  $[Pequeno(c) \wedge (Quadrado(a) \vee Quadrado(d))] \leftrightarrow [(Pequeno(c) \wedge Quadrado(a)) \vee (Pequeno(c) \wedge Quadrado(d))]$ .
6.  $Quadrado(a) \leftrightarrow (Quadrado(c) \leftrightarrow Grande(c))$ .