Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Estruturas Discretas**

Duração: 40m **Teste 4E** 21/12/07

SOLUÇÕES

---

1. Calcule:

   (a) $\overline{P}(6,2)$. R.: 36

   (b) $\dfrac{1!+3!+5!}{0!}$. R.: 127

   (c) $P(6,2)$. R.: 30

2. Em cada uma das alíneas seguintes responda com uma das seguintes alternativas:
$$C(7,3), P(7,3), \overline{P}(7,3).$$
   Considere uma caixa com 7 bolas numeradas (de 1 a 7). De quantas maneiras diferentes podemos extrair da caixa:

   (a) 3 bolas (uma de cada vez, sucessivamente). R.: $P(7,3)$

   (b) 3 bolas (uma de cada vez, sucessivamente), repondo cada bola de novo na caixa, depois de extraída. R.: $\overline{P}(7,3)$

   (c) um conjunto de 3 bolas (as 3 em simultâneo). R.: $C(7,3)$

   (d) 3 bolas (uma de cada vez, sucessivamente), de modo a que o número de cada bola extraída seja estritamente maior que o da bola anteriormente extraída. R.: $C(7,3)$

3. Seja $B = \{1,2,3,\ldots,40\}$.

   (a) Quantos elementos de B são primos? R.: 12

   (b) Quantos elementos de B são divisíveis por 2? R.: 20

   (c) Quantos elementos de B não são pares nem primos? R.: 9

4. O número de infectados por um vírus aumenta em 1500 indivíduos por ano.

   (a) Determine uma relação de recorrência para o número a_n de indivíduos infectados pelo vírus, ao fim de n anos. R.: $a_n = a_{n-1} + 1500$

   (b) Qual o número inicial de infectados se, 50 anos após se ter iniciado a contagem, houver 95 000 indivíduos infectados? R.: 20 000

RESOLUÇÃO

1(a) $\overline{P}(6,2) = 6^2 = 36$.

(b) $\dfrac{1!+3!+5!}{0!} = \dfrac{1+6+120}{1} = 127$.

(c) $P(6,2) = 6 \times 5 = 30$.

3(a) São 12: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

(b) Os divisíveis por 2 são os números pares $2, 4, 6, \ldots, 40$, ou seja, são $40/2 = 20$.

(c) Seja B_2 o subconjunto de B dos elementos divisíveis por 2 e seja B_p o dos elementos primos. Pela fórmula de inclusão-exclusão, o cardinal do conjunto $\overline{B_2} \cap \overline{B_p}$ dos que não são divisíveis por 2 nem são primos é dado por $|B| - (|B_2| + |B_p|) + |B_2 \cap B_p| = 40 - (20+12) + 1 = 9$.

4(a) $a_n = a_{n-1} + 1500$.

(b) $a_n = a_{n-1} + 1500 = a_{n-2} + 2 \times 1500 = a_{n-3} + 3 \times 1500 = \cdots = a_0 + n \times 1500 = a_0 + 1500\,n$. Portanto, $a_{50} = a_0 + 1500 \times 50 = a_0 + 75000$. Como $a_{50} = 95\,000$, então $a_0 = 95\,000 - 75\,000 = 20\,000$.

A resolução do outro teste é análoga:

SOLUÇÕES

TESTE 4F

1(a) 145

(b) 15

(c) 125

2(a) $P(6,3)$

(b) $C(6,3)$

(c) $C(6,3)$

(d) $\overline{P}(6,3)$

3(a) 10

(b) 12

(c) 18

4(a) $a_n = a_{n-1} + 150$

(b) 28 000