Ano lectivo 2008/09 **Exame de Estruturas Discretas**

Lic.^{as} Eng. Informática, Comunicação e Multimédia 5/02/09

SOLUÇÕES

---

1. (a) V (b) F (c) V (d) F (e) V.

2. (a) Basta mostrar que a fórmula $\neg p \to (q \to r) \leftrightarrow q \to (p \vee r)$ é uma tautologia:

$\neg p$	$\to$	$(q$	$\to$	$r)$	$\leftrightarrow$	q	$\to$	$(p$	$\vee$	$r)$
F	V	V	V	V	$\boxed{V}$	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	$\boxed{V}$	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	$\boxed{V}$	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	$\boxed{V}$	F	V	V	V	F
V	V	V	V	V	$\boxed{V}$	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	$\boxed{V}$	V	F	F	F	F
V	V	F	V	V	$\boxed{V}$	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	$\boxed{V}$	F	V	F	F	F

(b) Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\neg p \to (q \to r) &\equiv \neg\neg p \vee (q \to r) && \text{(equivalência } a \to b \equiv \neg a \vee b\text{)}\\
&\equiv p \vee (q \to r) && \text{(lei da dupla negação)}\\
&\equiv p \vee (\neg q \vee r) && \text{(equivalência } a \to b \equiv \neg a \vee b\text{)}\\
&\equiv \neg q \vee (p \vee r) && \text{(leis associativa e comutativa)}\\
&\equiv q \to (p \vee r). && \text{(equivalência } a \to b \equiv \neg a \vee b\text{)}
\end{aligned}$$

3. (a) `SIMULAÇÃO:`

`INPUT:` $n := 3.$

$soma := 0$

$\boxed{i=1}$

$\boxed{j=1}$ $soma := 0 - 2 = -2$

$\boxed{i=2}$

$\boxed{j=1}$ $soma := -2 - 2 = -4$

$\boxed{j=2}$ $soma := -4 - 2 = -6$

$\boxed{i=3}$

$\boxed{j=1}$ $soma := -6 - 2 = -8$

$\boxed{j=2}$ $soma := -8 - 2 = -10$

$\boxed{j=3}$ $soma := -10 - 2 = -12.$

`OUTPUT:` $soma(3) = -12.$

Solução alternativa: Como o valor inicial da variável *soma* é 0 e em cada passo dos dois ciclos do algoritmo este valor decresce duas unidades, então

$$soma(3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} -2 = -2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} 1 = -2\sum_{i=1}^{3} i = -2(1+2+3) = -12.$$

(b) De modo análogo, usando a fórmula para a soma dos primeiros n naturais obtida nas aulas,

$$soma(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} -2 = -2\sum_{i=1}^{n} i = -2\frac{n(n+1)}{2} = -n(n+1).$$

4. Seja $P(n)$ a proposição $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$. $P(1)$ é claramente verdadeira: $1+3=4=2^2$. Assumindo que $P(n)$ é verdadeira, provemos que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) = (n+2)^2.$$

Começando pelo membro esquerdo de $P(n+1)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) &= \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + 2n + 3 \\
&= (n+1)^2 + 2n + 3 \qquad \text{(pela hipótese de indução)} \\
&= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \\
&= ((n+1)+1)^2 \\
&= (n+2)^2
\end{aligned}$$

que é o membro direito de $P(n+1)$. Portanto, $P(n+1)$ é verdadeira e, pelo Princípio de Indução Matemática, segue que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Nesta situação teremos 5! maneiras de permutar entre si os cinco rapazes nos cinco lugares mais à esquerda e 5! maneiras de permutar entre si as cinco raparigas nos cinco lugares restantes. Logo, pelo princípio da multiplicação, há $5! \times 5! = 120 \times 120 = 14\,400$ maneiras de sentar os rapazes e as raparigas.

(b) Neste caso devemos notar que há 6 possibilidades de os rapazes (R) se disporem na fila

M	R	M	R	M	R	M	R	M	R
R	M	R	M	R	M	R	M	R	M
R	M	M	R	M	R	M	R	M	R
R	M	R	M	M	R	M	R	M	R
R	M	R	M	R	M	M	R	M	R
R	M	R	M	R	M	R	M	M	R

e, para cada uma delas, podemos permutar os rapazes e as raparigas entre si de $5! \times 5!$ maneiras diferentes. Assim, no total, existem $6 \times 5! \times 5! = 86\,400$ maneiras diferentes de sentar os rapazes e as raparigas.

(c) Podemos começar por sentar o Francisco (Fo) e a Francisca (Fa) lado a lado:

Fo	Fa	—	—	—	—	—	—	—	—
Fa	Fo	—	—	—	—	—	—	—	—
—	Fo	Fa	—	—	—	—	—	—	—
—	Fa	Fo	—	—	—	—	—	—	—
—	—	Fo	Fa	—	—	—	—	—	—
—	—	Fa	Fo	—	—	—	—	—	—
				⋮					
—	—	—	—	—	—	—	—	Fo	Fa
—	—	—	—	—	—	—	—	Fa	Fo

Temos 2×9 maneiras de fazer isso. Para cada uma delas os restantes 8 alunos podem ser permutados entre si de qualquer maneira pelo que, pelo princípio da multiplicação, no total existem $2 \times 9 \times 8! = 725\,760$ maneiras diferentes de sentar os rapazes e as raparigas na fila.

6. (a) Tantas quantos os subconjuntos de 2 cartas: $C(52, 2) = 1326$.

   (b) Existem $C(4, 2)$ maneiras diferentes de escolher, entre os 4 naipes disponíveis, os dois naipes das duas cartas na mão. Finalmente, como cada naipe tem 13 cartas distintas, existem $13 \times C(4, 2) = 78$ mãos de duas cartas com o mesmo valor.

   (c) Existem 4 possibilidades (naipes) para as 3 cartas do mesmo naipe. Estas podem ser escolhidas de entre as 13 cartas desse naipe. Existem assim $4 \times C(13, 3)$ modos diferentes de escolher as 3 cartas do mesmo naipe. A restante carta pode ser uma das $3 \times 13 = 39$ cartas dos outros três naipes. Em conclusão, existem $4 \times C(13, 3) \times 39 = 44616$ mãos de quatro cartas em que exactamente três são do mesmo naipe.

7. Hipótese D, porque para $n + 1 = 1$, então $n - 1 = -1 < 0$ donde a hipótese de indução não se aplica a 3^{n-1} e não podemos concluir que $3^{n-1} = 1$ (de facto, nesse caso, $3^{n-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$).

8. Consideremos o conjunto X dos 1000 inteiros entre 1 e 1000 e sejam A_2 o subconjunto de X dos números divisíveis por 2, A_5 o subconjunto dos divisíveis por 5 e A_{11} o subconjunto dos divisíveis por 11.

   (a) Aqui queremos calcular $|\overline{A_2}|$ que é, evidentemente, igual a

   $$|X \setminus A_2| = |X| - |A_2| = 1000 - 500 = 500.$$

   (b) Como $|A_5| = \lfloor \frac{1}{5}(1000) \rfloor = 200$ e $|A_2 \cap A_5| = \lfloor \frac{1}{10}(1000) \rfloor = 100$ (são exactamente os múltiplos de 10), então

   $$|\overline{A_2} \cap \overline{A_5}| = |X| - |A_2| - |A_5| + |A_2 \cap A_5| = 1000 - 500 - 200 + 100 = 400.$$

   (c) Finalmente, como

   $$A_{11} = \lfloor \frac{1}{11}(1000) \rfloor = \lfloor 90,9 \rfloor = 90,$$

   $$|A_2 \cap A_{11}| = \lfloor \frac{1}{22}(1000) \rfloor = \lfloor 45,5 \rfloor = 45,$$

   $$|A_5 \cap A_{11}| = \lfloor \frac{1}{55}(1000) \rfloor = \lfloor 18,2 \rfloor = 18$$

   e

   $$|A_2 \cap A_5 \cap A_{11}| = \lfloor \frac{1}{110}(1000) \rfloor = \lfloor 9,1 \rfloor = 9,$$

então

$$\begin{aligned}|\overline{A_2}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_{11}}| &= |X|-|A_2|-|A_5|-|A_{11}|+|A_2\cap A_5|+|A_2\cap A_{11}|+|A_5\cap A_{11}|-|A_2\cap A_5\cap A_{11}|\\ &= 1000-500-200-90+100+45+18-9=364.\end{aligned}$$

9. Trata-se de uma relação de recorrência de segunda ordem com equação característica

$$x^2=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0.$$

Resolvendo-a obtemos

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}\Leftrightarrow x=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}\ \vee\ x=\frac{-1-3}{4}=-1.$$

Portanto, a solução geral da relação de recorrência é da forma

$$a_n=\alpha\Big(\frac{1}{2}\Big)^n+\beta\big(-1\big)^n.$$

Os valores de α e β podem ser facilmente calculados usando as condições iniciais:

$$\begin{cases}0=\alpha+\beta\\ 1=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)+\beta\left(-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2}{3}\\ \beta=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Em conclusão,

$$a_n=\frac{2}{3}\times\Big(\frac{1}{2}\Big)^n-\frac{2}{3}\times\big(-1\big)^n=\frac{2}{3}\Big[\Big(\frac{1}{2}\Big)^n-\big(-1\big)^n\Big].$$

10. (a) Como $g(P_1)=2, g(P_2)=4, g(P_3)=4$ e $g(P_4)=4$ então, pelo Teorema de Euler, o grafo é euleriano pelo que existe um tal percurso. Por exemplo:

$$P_1-P_2-P_4-P_2-P_3-P_4-P_3-P_1.$$

(b) A matriz de adjacências é

$$\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&2\\1&1&0&2\\0&2&2&0\end{bmatrix}$$