Ano lectivo 2008/09 **Exame de Estruturas Discretas**

Lic.^{as} Eng. Informática, Comunicação e Multimédia 16/01/09

SOLUÇÕES

---

1. (a) V (b) V (c) V (d) F (e) V.

2. (a) Basta mostrar que a fórmula $(a \vee c) \wedge (b \vee \neg c) \to (a \vee b)$ é uma tautologia:

$(a$	$\vee$	$c)$	$\wedge$	$(b$	$\vee$	$\neg c)$	$\to$	$(a \vee b)$
V	V	V	V	V	V	F	$\boxed{\text{V}}$	V
V	V	F	V	V	V	V	$\boxed{\text{V}}$	V
V	V	V	F	F	F	F	$\boxed{\text{V}}$	V
V	V	F	V	F	V	V	$\boxed{\text{V}}$	V
F	V	V	V	V	V	F	$\boxed{\text{V}}$	V
F	F	F	F	V	V	V	$\boxed{\text{V}}$	V
F	V	V	F	F	F	F	$\boxed{\text{V}}$	F
F	F	F	F	F	V	V	$\boxed{\text{V}}$	F

(b) Queremos mostrar, usando uma prova por contradição, que se $a \vee c$ e $b \vee \neg c$ forem verdadeiras então $a \vee b$ também é. Suponhamos então, por absurdo, que $\neg(a \vee b)$ era verdadeira, isto é, $a \vee b$ era falsa. Então a e b eram simultaneamente falsas, o que implicaria na primeira premissa que c fosse verdadeira e na segunda que $\neg c$ também fosse verdadeira, o que é um absurdo pelo princípio da não contradição. Em conclusão, $a \vee b$ é necessariamente verdadeira quando as premissas o são.

3. (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,!}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{3\,!}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k^2$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1}\, k^3$ (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{n+k}$ (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, \frac{n+k}{(2k)\,!}$.

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{1}{i+2}-\frac{1}{i+1}\right) &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{102}-\frac{1}{101}\right)\\
&= \frac{1}{102}-\frac{1}{2}=-\frac{50}{102}=-\frac{25}{51}\,.
\end{aligned}$$

5. Como $4 \times_7 2 = 1$, então

$$\begin{aligned}
2x \equiv_7 5 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \times_7 2 \times_7 x \equiv_7 4 \times_7 5\\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv_7 6.
\end{aligned}$$

Portanto, as soluções para x são os inteiros da forma $6+7k$. Quais deles pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$? Precisamente os números 6 (tomando $k = 0$), 13 (tomando $k = 1$), 20 (tomando $k = 2$), 27 (tomando $k = 3$), ..., 1000 (note que o número 1000 é da forma $6 + 7k$ pois $1000 = 6 + 7 \times 142$). Uma vez que esta listagem começa em $k = 0$ e termina em $k = 142$, são precisamente 143 números.

6. O código para o país é da forma $-$, $--$ ou $---$ (onde cada posição é preenchida por um dos 10 algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$, sem qualquer restrição). Portanto existem $10 + 100 + 1000 = 1110$ códigos disponíveis. O resto do número é da forma $NXX - NXX - XXXX$ (onde N é um algarismo diferente de 0 e de 1 e X é um algarismo qualquer). Contando estes números, usando o princípio da multiplicação, obtemos

$$8 \times 10 \times 10 \times 8 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 8^2 \times 10^8.$$

Em conclusão, existem no total $1110 \times 8^2 \times 10^8 = 111 \times 64 \times 10^9 = 7104 \times 10^9$ números disponíveis.

7. $\overline{C}(5, 2) = C(5 + 2 - 1, 2) = C(6, 2) = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{30}{2} = 15$.

Listagem de todas as combinações com repetição, 2 a 2, das letras a, b, c, d, e:

aa	ab	ac	ad	ae
bb	bc	bd	be	
cc	cd	ce		
dd	de			
ee				

8. (a) Cada símbolo pode ser visto como uma sequência de comprimento 6 de pontos pequenos e pontos grandes (por exemplo, a letra "c" corresponde à sequência $\bullet\cdot\cdot\bullet\cdot\cdot$). Há $\overline{P}(2, 6) = 2^6 = 64$ sequências destas. A sequência $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ (figura (a)) não corresponde a nenhum símbolo, pelo que existem no total 63 símbolos diferentes.

   (b) Construir uma sequência dessas com 3 pontos grandes corresponde a escolher o subconjunto de 3 das 6 posições onde vamos colocar esses pontos (nas três posições restantes serão colocados pontos pequenos). Como existem $C(6, 3) = 20$ subconjuntos desses, a resposta é 20.

   (c) Com 0 pontos grandes não existe nenhum símbolo. Atendendo à alínea anterior existem $C(6, 2) + C(6, 4) + C(6, 6) = 15 + 15 + 1 = 31$ símbolos com um número par de pontos grandes.

9. Seja $P(n)$ a proposição $n! < n^n$.

$P(2)$ é claramente verdadeira: $2! = 2 < 2^2$.

Assumindo que $P(n)$ é verdadeira, provemos que $P(n + 1)$ é verdadeira, ou seja,

$$(n + 1)! < (n + 1)^{n+1}.$$

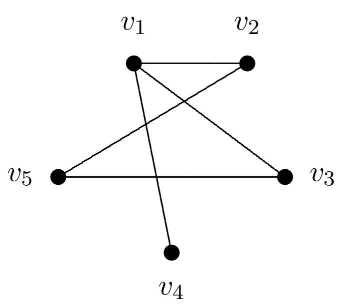
Começando pelo membro esquerdo de $P(n + 1)$ obtemos

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1) \times n! \\ &< (n+1) \times n^n \qquad \text{(pela hipótese de indução)} \\ &< (n+1) \times (n+1)^n \\ &= (n+1)^{n+1} \end{aligned}$$

que é o membro direito de $P(n + 1)$. Portanto, $P(n + 1)$ é verdadeira e, pelo Princípio de Indução Matemática, segue que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq 2$.

10. Evidentemente $a_1 = 1, a_2 = 2$ e $a_3 = 3$. Para $n \geq 3$, como $n = 1 + (n-1)$ e $n = 2 + (n-2)$, então
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$
Se assumirmos que $a_0 = 1$, então podemos dizer que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$ com as condições iniciais $a_0 = a_1 = 1$. Trata-se da sucessão de Fibonacci, que é uma relação de recorrência de segunda ordem com equação característica $x^2 - x - 1 = 0$. Resolvendo-a obtemos
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \vee \ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
Portanto, a solução geral da relação de recorrência é da forma
$$a_n = \alpha\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \beta\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$
Os valores de α e β podem ser facilmente calculados usando as condições iniciais:
$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \alpha + \beta \\ 1 = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$
Em conclusão,
$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\Big[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\Big].$$

11. Traçando o grafo a partir da sua matriz de adjacência obtemos:



   (a) Portanto $g(v_1) = 3, g(v_2) = 2, g(v_3) = 2, g(v_4) = 1$ e $g(v_5) = 2$.
   [também se poderia ter concluído isto a partir da soma de 1's em cada linha da matriz.]

   (b) Não, claramente.

   (c) Chama-se grafo euleriano a um grafo que contém um caminho euleriano fechado (ou seja, um caminho fechado sem repetição de arestas, contendo todas as arestas do grafo). Pelo Teorema de Euler, este grafo não é euleriano (pois tem vértices de grau ímpar). No entanto, como tem exactamente dois vértices de grau ímpar (v_1 e v_4), já é semi-euleriano: por exemplo, tem um caminho euleriano aberto, começando em v_1 e teminando em v_4:
$$v_1 - v_2 - v_5 - v_3 - v_1 - v_4.$$
   [note que este não é o único caminho euleriano aberto.]